

# Les catégories dérivées

Yannick Delbecque

Mémoire déposé en vue de l'obtention du titre de Ms.D es Science.

Président : Gonzalo Reyes

Directeur : Abraham Broer

Membre du jury : Pierre Berthiaume

Accepté le 22 mars 2000.

# Sommaire

L'objectif principal de ce mémoire est de faire une démonstration complète de l'existence des catégories dérivées et de prouver quelques unes de leurs propriétés les plus importantes. Nous présenterons la localisation d'une catégorie par un système multiplicatif et nous démontrerons que la localisation d'une catégorie additive est aussi additive. Nous montrerons à l'aide des cônes que la catégorie des complexes modulo homotopie d'une catégorie abélienne  $K(A)$  est une catégorie triangulée et aussi que la localisation d'une catégorie triangulée par un système multiplicatif compatible avec la structure triangulée est aussi triangulée, ce qui permettra de montrer l'existence des catégories dérivées et le fait qu'elles sont triangulées, en montrant que la famille des quasi-isomorphismes de  $K(A)$  est un système multiplicatif dans  $K(A)$ . Nous utiliserons ensuite les catégories dérivées pour définir les foncteurs dérivés d'un foncteur exact à gauche.

# Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur Abraham Broer pour son aide précieuse lors de la rédaction de ce mémoire et pour soutien financier.

Je dois aussi beaucoup au professeur Robert Bédart pour m'avoir donné l'occasion de présenter la théorie des catégories dérivées lors d'un séminaire sur la cohomologie d'intersection à l'Université du Québec à Montréal. Ces présentations auront servi ébaucher le premier plan général de mon mémoire.

Sur un plan plus personnel, les amis suivants m'ont soutenu, encouragé et inspiré et, dans leur cas comme dans les deux premiers, je souhaite par la présente mention de leur contributions souligner la dette que j'ai envers eux : Jérôme Fournier - m'ayant initié à une part de ses recherches en théorie des groupes, il a énormément stimulé mon propre travail - et Julien Marcil - parce qu'il m'a fait découvrir le laboratoire d'informatique théorique et quantique de l'Université de Montréal, j'ai pu échanger avec de nombreux chercheurs qui eurent une très grande influence sur moi.

Enfin, je tiens à remercier Platon pour m'avoir donné le goût des mathématiques.

# Table des matières

<b>1 Localisation</b>	<b>5</b>
1.1 Cas général . . . . .	5
1.2 Systèmes multiplicatifs . . . . .	7
1.3 Quelques morphismes dans les catégories localisées . . . . .	26
<b>2 Triangles dans les catégories de complexes</b>	<b>30</b>
2.1 Cônes . . . . .	30
2.2 Triangles distingués . . . . .	34
<b>3 Catégories triangulées</b>	<b>48</b>
3.1 Définitions et propriétés des catégories triangulées . . . . .	48
<b>4 Catégories dérivées</b>	<b>56</b>
4.1 Définition et existence . . . . .	56
4.2 Foncteurs dérivés . . . . .	59
<b>A Notations utilisées dans ce mémoire.</b>	<b>65</b>

# Introduction

Au début des années 60, Verdier a résolu dans sa thèse de doctorat, publiée récemment dans [Verdier2], les problèmes que l'on avait pour décrire la dualité des faisceaux de modules cohérents sur les préschémas. Sa thèse développe des idées de Grothendieck - son directeur de recherche - concernant le fondement de la théorie des foncteurs dérivés. La théorie classique ne permettait pas d'expliquer cette dualité, comme elle le fait pourtant dans d'autres types de dualités. Il fallait parvenir à définir la notion de foncteur dérivé sans faire usage des résolutions injectives et projectives. Pour y parvenir, on imagina identifier les objets à l'étude avec leur résolutions pour obtenir une nouvelle catégorie, la catégorie dérivée, où les foncteurs dérivés se définiraient sans faire usage de résolutions. Nous expliquerons brièvement dans cette introduction, et avec plus de détails dans le dernier chapitre de ce mémoire, comment faire cette identification. Le lecteur désirant connaître l'histoire de la naissance des catégories dérivées plus en détails pourra consulter l'introduction de [Kashiwara - Schapira].

Ce concept de catégorie dérivée d'une catégorie abélienne fût créé afin de démontrer ce qui est maintenant appelé le théorème de dualité de Verdier. Si on s'intéresse uniquement au contenu relatif à l'algèbre homologique, ce théorème de topologie algébrique affirme qu'il y a une certaine paire de foncteurs adjoints entre les catégories *dérivées* de deux catégories de complexes de faisceaux, mais pas nécessairement entre les deux catégories de complexes de faisceaux elles-même. On a donc une situation où si l'on considère le problème donné - trouver un foncteur adjoint - directement dans la catégorie où il est formulé, le problème est insoluble, mais si on se permet d'oublier un peu de la structure de la catégorie donnée en transformant certaines flèches en isomorphismes (dans le cas du théorème de Verdier, ces flèches sont les quasi-isomorphismes, c'est-à-dire les morphismes de complexes de faisceaux  $f$  tels que le morphisme induit sur la cohomologie,  $H^k(f)$ , est un isomorphisme), on peut alors trouver une solution naturelle.

Il y a deux raisons théoriques principales justifiant l'étude des catégories dérivées. La première est celle déjà mentionnée : permettre d'obtenir des résultats impossibles à obtenir autrement. La deuxième est qu'elles permettent de mieux comprendre les foncteurs dérivés d'un foncteur entre deux catégories abéliennes. L'idée est la suivante : on identifie un objet  $X$  d'une catégorie abélienne  $A$  avec le complexe concentré au degré 0  $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow X \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$ . Une résolution projective de  $P \xrightarrow{\varepsilon} X$  peut

être vue comme un morphisme de complexe :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & P^{-1} & \longrightarrow & P^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

On a que  $\varepsilon$  est un quasi-isomorphisme de  $K(A)$ , c'est-à-dire que  $H(\varepsilon)$  est un isomorphisme. Vue de cette manière, une résolution est un cas particulier de quasi-isomorphisme. Il est donc tentant d'identifier les objets de  $A$  et leurs résolutions en transformant les quasi-isomorphismes de  $K(A)$  en isomorphismes pour "rendre exact" sur la catégorie ainsi obtenue les foncteurs qui sont exacts à droite sur  $A$ . On montrera dans le dernier chapitre de ce mémoire comment utiliser cette identification pour définir les foncteurs dérivés. C'est cette identification qui est l'idée de base pour la définition des catégories dérivées.

L'opération centrale de la construction des catégories dérivées est de transformer la catégorie  $K(A)$  des complexes d'objets d'une catégorie abélienne  $A$  modulo homotopie en une catégorie  $D(A)$  de manière à ce que les quasi-isomorphismes de  $K(A)$  deviennent des isomorphismes dans  $D(A)$ . Dans ce mémoire, nous étudierons premièrement comment on peut inverser formellement une famille  $\Sigma$  de morphismes d'une catégorie quelconque  $C$  pour obtenir une catégorie  $C_\Sigma$  appelée la *localisation* de  $C$ . Nous énoncerons ensuite quelques contraintes imposées à  $\Sigma$  qui nous permettront de pouvoir démontrer certains résultats intéressants, comme par exemple le fait que si  $A$  est une catégorie additive et que  $\Sigma \subset Fl(A)$  vérifie ces contraintes, alors  $A_\Sigma$  est aussi additive. Nous pourrons donc localiser  $K(A)$  par rapport aux quasi-isomorphismes pour obtenir la catégorie  $D(A)$  voulue.

On verra que la catégorie  $D(A)$  n'est pas abélienne en général. Comme on veut pouvoir travailler dans  $D(A)$  avec des outils analogues à ceux utilisés dans une catégorie abélienne, nous serons forcés d'étudier la structure de  $D(A)$  plus en détails pour y définir les concepts nécessaires afin d'y démontrer l'équivalent des résultats standards dans les catégories de complexes, comme par exemple l'existence de longues suites exactes d'homologie associée aux "suites exactes" de  $D(A)$ . Pour ce faire nous montrerons que  $D(A)$  est une catégorie *triangulée*. Les axiomes de cette nouvelle structure sont une abstraction de quelques propriétés de  $K(A)$  que nous trouverons à l'aide de *triangles*, objets ayant beaucoup de points en commun avec les suites exactes et qui en seront les substituts dans  $D(A)$ .

Il y a aujourd'hui plusieurs autres applications des catégories dérivées et plusieurs autres exemples de catégories triangulées, ce qui justifie aujourd'hui l'étude de leur structure indépendamment de toute application. Par exemple, on sait maintenant que la notion de catégorie d'homotopie stable en topologie algébrique, créée peu avant les travaux de Verdier sur la dualité, est une catégorie dérivée. Il y a aussi de nombreuses applications à l'étude des catégories de modules sur un anneau de groupe et en théorie des représentations, comme par exemple dans [Konig-Zimmermann]. Plusieurs ouvrages généraux sur l'algèbre homologique publiés récemment utilisent les catégories dérivées pour définir les foncteurs dérivés. L'objectif principal de ce mémoire est de présenter les points les plus importants à la base de cette théorie à un lecteur ayant déjà

une certaine familiarité avec les rudiments de l'algèbre homologique classique, comme présenté par exemple dans [Jacobson] ou le chapitre 4 de [Hilton - Stambach], mais n'ayant pas l'habileté requise pour aborder les "introductions" des ouvrages actuels avec facilité. Il semble d'ailleurs que les textes d'introduction en français sont plutôt rares, les seuls connus de l'auteur étant celui de Grivel dans [Grivel] et celui de Verdier dans [Verdier1].

# Chapitre 1

## Localisation

### 1.1 Cas général

Soit  $C$  une catégorie et  $\Sigma \subset Fl(C)$  une classe de morphismes de  $C$ . On veut inverser formellement les morphismes de  $\Sigma$  pour obtenir une catégorie  $C_\Sigma$  où ils seront des isomorphismes. Pour ce faire, nous allons présenter une construction explicite manquant un peu de généralité, mais qui permet d'avoir une plus grande intuition dans les constructions faites dans la section suivante.

Soit  $\Gamma$  le graphe orienté associé à  $C$  - les sommets et les arêtes de  $\Gamma$  sont les objets et les morphismes de  $C$  respectivement - où on ajoute pour chaque arête  $f \in \Sigma$  une arête d'orientation opposée  $f'$ . Nous faisons bien sûr un abus de notation fort commode en identifiant l'arête associée au morphisme  $f$  à  $f$  lui-même. Il faut remarquer que nous supposons implicitement que la catégorie  $C$  est petite, c'est-à-dire que  $Ob(C)$  est un ensemble - et non une classe. Comme dans les applications en algèbre homologique les catégories étudiées sont très souvent des classes propres, il convient de préciser que l'on donnera dans la section suivante une construction fonctionnant dans le cas général qui coïncide avec la construction faite dans cette section si la catégorie est petite.

Soit  $\sim$  la relation d'équivalence sur les chemins de  $\Gamma$  engendrée par les relations suivantes, où  $f \in \Sigma$  et  $g, h \in Fl(C)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} Af f' B \sim AIdB \\ Af' f B \sim AIdB \\ AId f' B \sim Af' B \\ Af' B \sim Af' IdB \\ AghB \sim A(g \circ h)B \end{array} \right.$$

où  $f_k \dots f_1$  dénote le chemin de longueur  $k$  passant dans l'ordre par les flèches  $f_1, \dots, f_k$

$$\cdot \xrightarrow{f_1} \cdot \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{k-1}} \cdot \xrightarrow{f_k} \cdot$$

et  $AfB$  dénote le chemin passant dans l'ordre par le chemin  $A$ , l'arête  $f$  et le chemin  $B$ . On notera la classe d'équivalence d'un chemin  $A$  dans  $\Gamma$  par  $\bar{A}$ . On définit la catégorie



$C_\Sigma$  par :

$$\begin{aligned}\text{Ob}(C_\Sigma) &= V(\Gamma) = \text{Ob}(C) \\ \text{Hom}_{C_\Sigma}(X, Y) &= \{\text{chemins dans } \Gamma \text{ allant de } X \text{ à } Y\} / \sim\end{aligned}$$

avec comme composition dans  $C_\Sigma$  la juxtaposition modulo  $\sim$ , c'est-à-dire que si  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont des classes d'équivalences représentées par des chemins allant de  $X$  à  $Y$  et de  $Y$  à  $Z$  respectivement, alors  $\bar{A} \circ \bar{B}$  est défini par  $\overline{AB}$ . Cette loi de composition est trivialement associative, et on note que dans cette catégorie, le morphisme identité sur  $X$  est  $\overline{Id_X}$  puisque pour tout morphismes  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  on a que  $\overline{Id_X} \circ \bar{A} = \bar{A}$  et  $\bar{B} \circ \overline{Id_X} = \bar{B}$  en appliquant directement les relations définissant la relation d'équivalence  $\sim$ .

**Théorème 1.** (*Propriété universelle de la localisation.*) Il y a un foncteur  $Q : C \longrightarrow C_\Sigma$  envoyant les  $f \in \Sigma$  sur des isomorphismes et tel que  $C_\Sigma$  a la propriété universelle suivante : si  $F : C \longrightarrow C'$  est un autre foncteur envoyant les  $f \in \Sigma$  sur des isomorphismes de  $C'$ , alors il existe un unique foncteur  $G : C_\Sigma \longrightarrow C'$  tel que  $F = G \circ Q$  :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{Q} & C_\Sigma \\ & \searrow F & \downarrow G \\ & & C' \end{array}$$

*Démonstration.* On définit le foncteur  $Q$  comme suit :  $Q(X) = X$  pour les objets et  $Q(f) = \bar{f}$  pour les morphismes. Si  $f \in \Sigma$ ,  $f : X \longrightarrow Y$ , alors on a par définition que  $\bar{f}\bar{f}' = \overline{ff'}$  et de même que  $\bar{f}'\bar{f} = \overline{f'f}$ , et donc que  $Q(f)$  est un isomorphisme dans  $C_\Sigma$ . Il reste à vérifier la propriété universelle de la localisation. Soit  $F : C \longrightarrow C'$  un foncteur envoyant les  $f \in \Sigma$  sur des isomorphismes de  $C'$ . On définit  $G : C_\Sigma \longrightarrow C'$  par  $G(X) = F(X)$  pour les  $X \in \text{Ob}(C_\Sigma)$ ,

$$\begin{cases} G(\bar{f}) &= F(f) & \forall f \in Fl(C) \\ G(\bar{f}') &= F(f')^{-1} & \forall f \in \Sigma \end{cases}$$

et par  $G(\overline{AB}) = G(\bar{A}) \circ G(\bar{B})$  pour  $A, B$  deux chemins de  $\Gamma$ .

Vérifions que  $G$  est bien défini. Si  $\bar{f}_1 = \bar{f}_2$ , alors il est possible de passer du chemin  $f_1$  au chemin  $f_2$  en un nombre fini d'étapes en utilisant les relations définissant  $\sim$ . Si on montre qu'à chacune de ces étapes l'égalité des images par  $G$  est préservée, nous aurons le résultat voulu. Si à une étape donnée nous utilisons la relation  $AfgB \sim A(f \circ g)B$ , avec  $f, g \in Fl(C)$ , alors nous aurons que

$$\begin{aligned}G(\overline{AfgB}) &= G(\bar{A}) \circ G(\overline{fg}) \circ G(\bar{B}) \\ &= G(\bar{A}) \circ G(\bar{f}) \circ G(\bar{g}) \circ G(\bar{B}) \\ &= G(\bar{A}) \circ F(f) \circ F(g) \circ G(\bar{B}) \\ &= G(\bar{A}) \circ F(f \circ g) \circ G(\bar{B}) \\ &= G(\bar{A}) \circ G(\overline{f \circ g}) \circ G(\bar{B}) \\ &= G(\overline{A(f \circ g)B})\end{aligned}$$

On fait de même pour les étapes utilisant les autres relations.  $G$  est donc bien défini. De plus, par définition nous avons que  $G(\alpha \circ \beta) = G(\alpha) \circ G(\beta)$ , donc  $G$  est bien un foncteur.

Si  $G' : C_\Sigma \longrightarrow C'$  est un autre foncteur ayant les mêmes propriétés que  $G$ , alors on a que  $GQ = G'Q = F$

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{Q} & C_\Sigma \\ & \searrow F & \downarrow G \\ & & C' \end{array}$$

et donc si  $f \in Fl(C)$ ,  $G(\bar{f}) = G \circ Q(f) = F(f) = G' \circ Q(f) = G'(\bar{f})$ , et si  $f \in \Sigma$ , alors  $G(\bar{f}') = F(f)^{-1} = (G' \circ Q(f))^{-1} = G'(Q(f)^{-1}) = G'(\bar{f}'^{-1}) = G'(\bar{f}')$ . On a ainsi montré que  $G = G'$  et donc que  $G$  est unique.  $\square$

Remarquons que ce théorème est un cas particulier d'une propriété générale des catégories définies à l'aide de générateurs et relations sur un graphe ; le lecteur intéressé pourra trouver la définition générale et d'autres exemples d'utilisations des catégories définies sur un graphe avec des relations dans [Barr - Wells].

## 1.2 Systèmes multiplicatifs

L'objectif principal de cette section est d'énoncer des conditions nécessaires afin que la catégorie obtenue par localisation par rapport à une classe de morphismes soit additive si la catégorie de départ l'est. La forme générale d'un morphisme de la catégorie localisée tel que défini dans la section précédente est trop complexe. Comme dans le cas de la localisation d'un anneau (pas nécessairement commutatif) par rapport à un système multiplicatif, il faut imposer des contraintes à l'ensemble des éléments que nous inversons. Nous commencerons par décrire les idées principales informellement.

Soit  $A$  une catégorie,  $\Sigma \subset Fl(A)$  et  $\alpha \in Hom_{A_\Sigma}(X, Y)$ . On peut toujours trouver dans la classe d'équivalence  $\alpha$  en composant les morphismes consécutifs comme dans la dernière propriété de  $\sim$  donnée dans la section précédente, c'est-à-dire  $B_1ghB_2 \sim B_1(g \circ h)B_2$ , un représentant canonique pour  $\alpha$  ayant la forme suivante :

$$f_1A_1f_2A_2 \dots A_{k-1}f_k$$

où les  $f_i$  sont des morphismes quelconques de  $C$  et les  $A_i$  sont des suites de morphismes dans de la forme  $g'_1 \cdots g'_n$  avec  $\forall_{i=1 \dots k} g_i \in \Sigma$ . On ne peut réduire les  $A_i$  à une expression plus simple puisque la composée de deux morphismes dans  $\Sigma$  n'est pas en général dans  $\Sigma$ . Si on suppose que la composition de deux morphismes de  $\Sigma$  est aussi dans  $\Sigma$ , l'expression du représentant se simplifie puisque les  $A_i$  se réduisent alors à un seul morphisme.

Si la catégorie  $A$  est additive, on veut pouvoir définir la somme de morphismes dans  $A_\Sigma$  et munir  $A_\Sigma$  d'une structure de catégorie additive. Pour ce faire, nous supposons qu'il est possible de trouver un «dénominateur commun» à deux morphismes en supposant qu'il est possible de ramener le représentant canonique ci-haut à un simple produit de la forme  $f \circ g'$  (ou  $g' \circ f$ ) où  $f \in Fl(C)$  et  $g \in \Sigma$ . Dans ce cas, en remarquant

l'analogie entre un morphisme  $\overline{fg'}$  et la fraction " $\frac{f}{g}$ ", on peut s'inspirer de l'identité algébrique élémentaire suivante

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{abd}{b(bd)} + \frac{cbd}{d(bd)} = \frac{ad+bd}{bd}$$

pour définir la somme de deux morphismes en formalisant le calcul suivant : si  $\alpha_1 = f_1g'_1$  et  $\alpha_2 = f_2g'_2$ , alors on posera que

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= f_1g'_1 + f_2g'_2 \\ &= f_1u_1u'_1g'_1 + f_2u_2u'_2g'_2 \\ &= f_1u_1(g_1u_1)' + f_2u_2(g_2u_2)' \\ &= (f_1u_1 + f_2u_2)(g_1u_1)' \end{aligned}$$

où nous supposons l'existence des  $u_i \in \Sigma$  tels que  $g_1u_1 = g_2u_2$  et le fait que  $g_1u_1$  est dans  $\Sigma$  utilise l'hypothèse, mentionnée plus haut, que le produit de deux éléments de  $\Sigma$  y est aussi. Comme dans la dernière ligne la somme est une somme de morphismes de  $A$  et est donc donnée par le fait que  $A$  est additive, la somme  $\alpha_1 + \alpha_2$  peut donc être définie par cette expression.

Notons que dorénavant nous indiquerons qu'une flèche d'un diagramme est dans  $\Sigma$  en utilisant une hampe double comme dans la flèche suivante :  $\Longrightarrow$ .

**Définition 1.** Soit  $C$  une catégorie quelconque.  $\Sigma \subset Fl(C)$  est un système multiplicatif si et seulement si :

(SM1)  $\forall_{X \in Ob(C)} Id_X \in \Sigma$  et si  $f : X \Longrightarrow Y$  et  $g : Y \Longrightarrow Z$  sont dans  $\Sigma$ , alors  $g \circ f \in \Sigma$ .

(SM2)  $\forall_{f_1 : X \rightarrow Y} \forall_{g_1 : Z \rightarrow Y} \exists_{f_2 \in Fl(C)} \exists_{g_2 \in \Sigma}$  tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f_2} & Z \\ \parallel & & \parallel \\ g_2 \downarrow & & \downarrow g_1 \\ X & \xrightarrow{f_1} & Y \end{array}$$

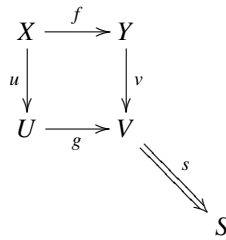
et la propriété duale, résumée par l'existence du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} W & \xleftarrow{f_2} & Z \\ \uparrow \parallel & & \uparrow \parallel \\ g_2 & & g_1 \\ X & \xleftarrow{f_1} & Y \end{array}$$

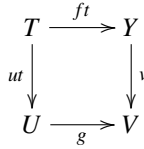
(SM3)  $\forall_{f,g : X \rightarrow Y} (\exists_{s \in \Sigma} sf = sg \Leftrightarrow \exists_{t \in \Sigma} ft = gt)$  Sous forme de diagramme :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \Leftrightarrow W \xrightarrow{t} X \xrightarrow{f} Y$$

L'axiome SM1 est une simple condition de fermeture, analogue à celle que l'on retrouve en algèbre commutative pour les systèmes multiplicatifs dans les anneaux. L'axiome SM2 permet de « changer l'ordre » des morphismes dans le cas où nous ne pouvons plus le faire en cherchant un représentant canonique aux morphismes de  $C_\Sigma$ , comme nous l'avons expliqué plus haut. Par exemple,  $\overline{f_1 g'_1}$  peut être représenté en utilisant SM2 comme  $\overline{g'_2 f_2}$ . Le rôle de SM3 peut être éclairci par le fait que, dans les démonstrations subséquentes, nous ferons fréquemment usage d'un certain type d'argument reposant sur lui : Supposons que nous avons un carré de morphismes qui n'est pas nécessairement commutatif, mais aussi un morphisme  $s \in \Sigma$  tel que  $svf = sgu$  :



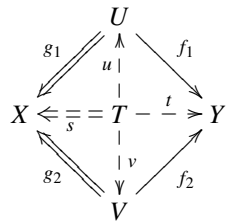
Si nous désirons avoir un carré commutatif, nous pouvons utiliser SM3 pour obtenir un morphisme  $t : T \Rightarrow X$  de manière à ce que le diagramme suivant soit commutatif :



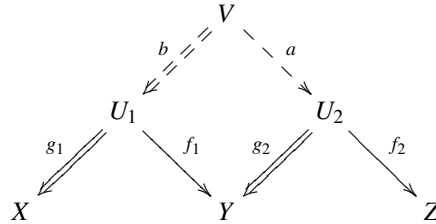
Remarquons enfin que SM1, SM2 et SM3 sont auto-duaux. Ainsi, si  $\Sigma$  est un système multiplicatif de la catégorie  $C$ , alors  $\Sigma^{op}$ , la famille des morphismes de  $C^{op}$  correspondant aux morphismes de  $\Sigma$ , est un système multiplicatif de  $C^{op}$ .

Nous pouvons maintenant énoncer un théorème qui donne une autre caractérisation de la localisation par  $\Sigma$  si  $\Sigma$  est un système multiplicatif.

**Théorème 2.** *Soit  $A$  une catégorie additive. La catégorie  $A'_\Sigma$  suivante a la propriété universelle de la localisation et est donc isomorphe à la catégorie  $A_\Sigma$ ; elle est définie par  $Ob(A'_\Sigma) = Ob(A)$  et  $Hom_{A'_\Sigma}(X, Y) =$  classes d'équivalences des paires  $(f, g)$  de morphismes de  $A$ , avec  $f : Z \rightarrow Y$  et  $g : Z \Rightarrow X$ , sous la relation d'équivalence suivante :  $(f_1, g_1)$  est équivalent à  $(f_2, g_2)$  si et seulement si  $\exists_{u, v, s, t}$  tels que le diagramme suivant commute :*



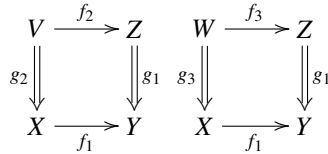
et avec comme composition des morphismes représentés par les paires  $(f_1, g_1)$ ,  $(f_2, g_2)$  la classe d'équivalence de la paire  $(f_2a, g_1b_1)$  où les morphismes  $a$  et  $b$  sont obtenu en utilisant SM2 comme dans le diagramme suivant :



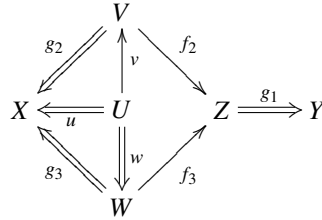
Avant de donner la preuve du théorème, on prouve le lemme suivant dont la preuve illustre la plupart des techniques utilisées par la suite.

**Lemme 1.** Dans SM2, la paire  $(f_2, g_2)$  est unique à équivalence de paires près.

*Démonstration.* Soit  $f_1 : X \rightarrow Y$  et  $g_1 : Z \rightrightarrows Y$  et  $(f_2, g_2)$ ,  $(f_3, g_3)$  deux paires telles que les carrés suivants commutent :



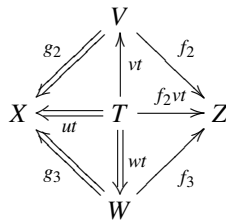
Alors par SM2 il existe  $v : U \rightarrow V$  et  $w : U \rightrightarrows W$  tels que  $g_3w = g_2v = u$ .  $u \in \Sigma$  par SM1 puisque  $g_3, w \in \Sigma$ . On a donc le diagramme



où la partie de gauche commute par construction. On utilise maintenant l'argument typique décrit plus haut pour terminer la preuve : comme

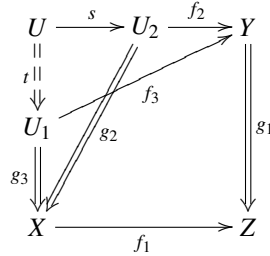
$$g_1f_2v = f_1g_2v = f_1g_3w = g_1f_3w$$

et  $g_1 \in \Sigma$ , il existe par SM3 un morphisme  $t : T \rightrightarrows U$  tel que  $f_2vt = f_3wt$ . On a donc le diagramme commutatif :



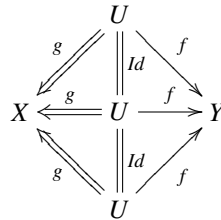
où  $ut \in \Sigma$  par SM1, ce qui montre bien que les paires  $(f_2, g_2), (f_3, g_3)$  sont équivalentes.  $\square$

On remarque que si  $(f_2, g_2)$  et  $(f_3, g_3)$  sont deux paires donnée par SM2 comme dans le lemme que nous venons de démontrer, alors comme ces paires sont équivalentes, on a des morphismes  $s, t$  avec  $t \in \Sigma$  tels que le diagramme suivant commute :

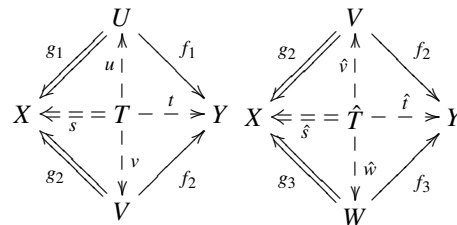


Démontrons maintenant le théorème.

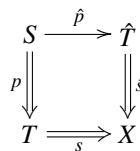
*Démonstration.* Vérifions tout d'abord que la relation donnée est bien une relation d'équivalence. Elle est réflexive puisque le diagramme suivant commute :



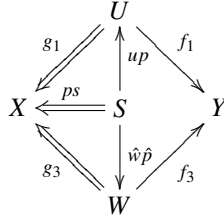
Elle est trivialement symétrique, et elle est aussi transitive. Si les diagrammes suivants sont commutatifs :



alors par SM2 on peut compléter  $s$  et  $\hat{s}$  en un carré commutatif :



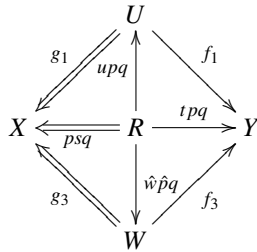
ce qui nous donne le diagramme suivant, où  $ps \in \Sigma$  par SM1 :



La partie gauche de ce diagramme est commutative par construction ; la partie droite du diagramme ne commutant pas nécessairement, pour avoir l'équivalence entre  $(f_1, g_1)$  et  $(f_3, g_3)$  nous utiliserons l'argument typique décrit avant cette démonstration : on a que

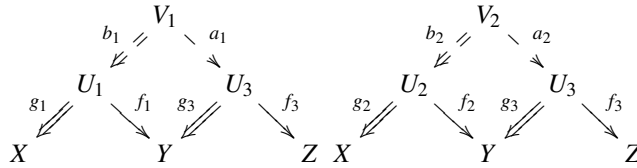
$$g_2vp = sp = \hat{w}\hat{p} = g_2\hat{v}\hat{p}$$

et que  $g_2 \in \Sigma$ . Par SM3, il existe donc un morphisme  $q : R \implies S$  tel que  $vpq = \hat{v}\hat{p}q$ . Par hypothèse,  $f_1u = f_2v$  et  $f_3\hat{w} = f_2\hat{v}$ , ce qui implique que  $f_1upq = f_2vpq = f_2\hat{v}\hat{p}q = f_3\hat{w}\hat{p}q$ , ce qui nous donne le diagramme commutatif suivant :



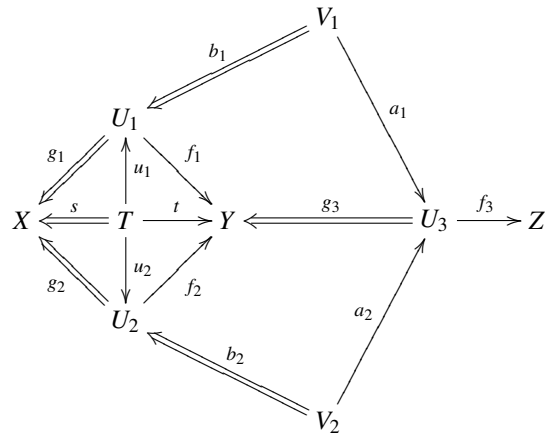
Vérifions maintenant que la composition telle que définie dans l'énoncé du théorème est bien définie. Remarquons premièrement que si on compose  $(f_1, g_1)$  et  $(f_2, g_2)$  selon la règle donnée, il pourrait y avoir plusieurs couples différents de morphismes  $(a, b)$  tels que  $bf_1 = ag_2$ , comme donné dans SM2, mais que ces couples sont tous équivalents par le lemme précédent, ce qui entraîne automatiquement l'unicité de la composition par rapport à ce choix.

Supposons maintenant que  $(f_1, g_1)$  est équivalent à  $(f_2, g_2)$  et considérons leurs compositions avec  $(f_3, g_3)$  :

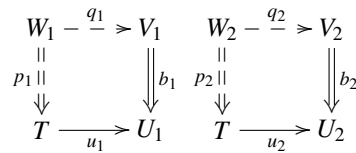


Il faut montrer que  $(f_3a_1, g_1b_1)$  est équivalent à  $(f_3a_2, g_2b_2)$ .

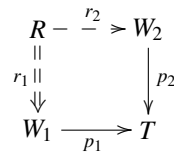
En combinant l'information disponible, nous avons le diagramme commutatif suivant :



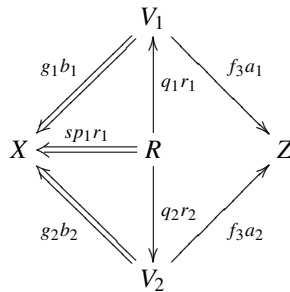
Par SM2, on peut obtenir les carrés commutatifs suivants :



On peut ainsi, en utilisant une fois encore SM2, obtenir un autre carré commutatif à partir des deux carrés précédents :



On a donc la situation suivante :





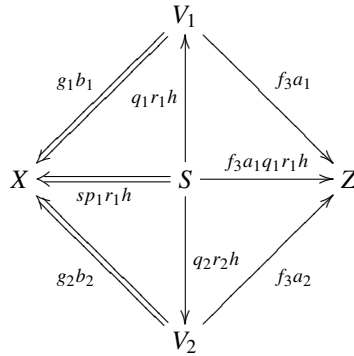
Comme les triangles de gauche commutent par construction puisqu'on a que

$$\begin{aligned}
 (g_1 b_1)(q_1 r_1) &= g_1 u_1 p_1 r_1 \\
 &= s(p_1 r_1) \\
 &= (g_2 u_2)(p_2 r_2) \\
 &= (g_2 b_2)(q_2 r_2)
 \end{aligned}$$

On a aussi que

$$\begin{aligned}
 g_3 a_2 q_2 r_2 &= f_2 b_2 q_2 r_2 \\
 &= f_2 u_2 p_2 r_2 \\
 &= f_1 u_1 p_1 r_1 \\
 &= f_1 b_1 q_1 r_1 \\
 &= g_3 a_1 q_1 r_1
 \end{aligned}$$

et que  $g_3 \in \Sigma$ , on peut utiliser encore une fois l'argument typique pour trouver un morphisme  $h : S \rightarrow R$  tel que  $a_2 q_2 r_2 h = a_1 q_1 r_1 h$  et obtenir le diagramme commutatif suivant



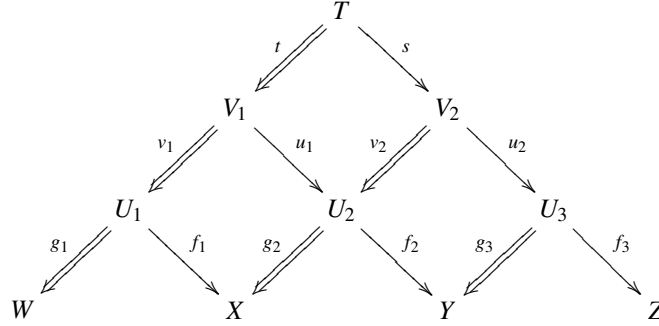
ce qui prouve que la composition est bien définie en fonction du premier argument.

On fait un argument similaire pour vérifier qu'elle est aussi bien définie en fonction du deuxième argument.

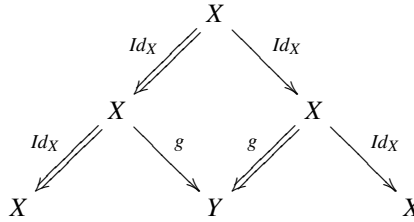
On note pour la suite de la démonstration que dans  $A'_\Sigma$  les morphismes identités sont les morphismes représentés par les paires  $(Id_X, Id_X)$ .

Pour que  $A'_\Sigma$  soit une catégorie, il faut aussi que la composition soit associative. Elle l'est bien, puisque  $((f_1, g_1) \circ (f_2, g_2)) \circ (f_3, g_3) = (f_3 a_2 s, g_1 v_1 t) = (f_1, g_1) \circ ((f_2, g_2) \circ (f_3, g_3))$

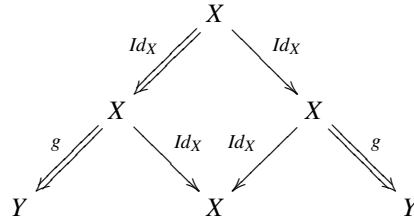
$(f_3, g_3)$ ) comme indiqué par la commutativité du diagramme suivant :



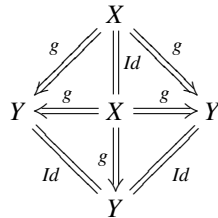
Il reste à vérifier que  $A'_\Sigma$  a la propriété universelle de la localisation. Soit  $P'_\Sigma : A \rightarrow A'_\Sigma$  le foncteur défini par  $P'_\Sigma(X) = X$  pour tout objet  $X$  et par  $P'_\Sigma(f) =$  classe d'équivalence de  $(f, Id)$  pour les morphismes. Ce foncteur envoie bien les  $g \in \Sigma$  sur des isomorphismes de  $A'_\Sigma$  : la paire  $(g, Id_X) \circ (Id_X, g)$  est équivalente à  $(Id_X, Id_X)$  par la commutativité du diagramme suivant :



et  $(Id_X, g) \circ (g, Id_X) = (g, g)$  par la commutativité de

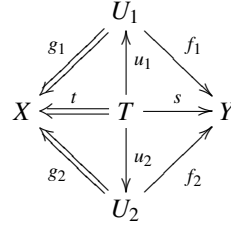


$(g, g)$  est équivalente à  $(Id_Y, Id_Y)$  par la commutativité de



Soit  $F : A \rightarrow B$  un autre foncteur envoyant les éléments de  $\Sigma$  sur des isomorphismes. Il faut construire un foncteur  $G : A'_\Sigma \rightarrow B$  tel que  $G \circ P'_\Sigma = F$ . On définit  $G$  de la manière suivante :  $G(X) = F(X)$  pour les  $X \in \text{Ob}(A'_\Sigma) = \text{Ob}(A)$ , et pour

$\alpha \in \text{Hom}_{A'_\Sigma}(X, Y)$  représenté par la paire  $(f, g)$ ,  $g \in \Sigma$ , on pose  $G(\alpha) = F(f)F(g)^{-1}$ . Vérifions que  $G$  est bien défini. Si  $(f_1, g_1)$  est équivalent à  $(f_2, g_2)$ , alors on a un diagramme commutatif :

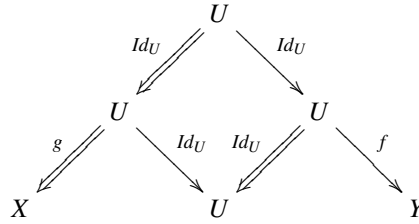


En appliquant  $G$  aux deux paires on obtient par la commutativité du diagramme précédent

$$\begin{aligned}
 G((f_1, g_1))F(t) &= F(f_1)F(g_1)^{-1}F(t) \\
 &= F(f_1)F(u_1) \\
 &= F(f_2)F(u_2) \\
 &= F(f_2)F(g_2)^{-1}F(t) \\
 &= G((f_2, g_2))F(t)
 \end{aligned}$$

Mais  $F(t)$  est un isomorphisme dans  $B$ , on a donc que  $G((f_1, g_1)) = G((f_2, g_2))$ , c'est-à-dire que  $G$  ne dépend pas du représentant choisi.

Pour terminer la vérification, nous devons montrer que  $G$  est unique. Si  $G'$  est un autre foncteur tel que  $G' \circ P'_\Sigma = F$ , alors soit  $\alpha \in \text{Hom}_{A'_\Sigma}(X, Y)$  représenté par la paire  $(f, g)$ . On note que dans ce cas,  $\alpha = P'_\Sigma(f)P'_\Sigma(g)^{-1}$ , puisqu'on peut représenter la composition de  $(f, Id)$  et  $(Id, g)$  par  $(f \circ Id, Id \circ g)$  comme indiqué par le diagramme suivant :



Comme on a que pour tout objet  $X$  de  $A$   $G'(X) = G'(P'_\Sigma(X)) = F(X) = G(X)$ , on peut faire le calcul suivant :

$$G'(\alpha) = G'(P'_\Sigma(f))G'(P'_\Sigma(g)^{-1}) = F(f)F(g)^{-1} = G(\alpha)$$

ce qui prouve que  $G' = G$ . □

Le corollaire suivant sera utilisé dans les démonstrations subséquentes.

**Corollaire 1.** (1) Si  $\Sigma$  est un système multiplicatif de  $A$ , alors tout morphisme  $\alpha \in Fl(A_\Sigma)$  peut être représenté de chacune des deux manières suivantes :  $\alpha = \overline{f_1 g'_1}$  ou  $\alpha = \overline{g'_2 f_2}$ , où  $f_1, f_2 \in Fl(A)$  et  $g_1, g_2 \in \Sigma$ .

(2)  $\overline{f_1 g'_1} = \overline{f_2 g'_2}$  si et seulement si  $(f_1, g_1)$  est équivalent à  $(f_2, g_2)$  au sens du dernier théorème.

*Démonstration.* (1) Si  $\alpha$  est représenté par  $f_1 g'_1 \dots f_n g'_n$  ( $g_i \in \Sigma$ ), alors il suffit de changer l'ordre des morphismes en utilisant SM2 pour obtenir un représentant de la forme voulue.

(2) ( $\Leftarrow$ ) Si un tel diagramme existe, on a que

$$f_1 g'_1 \sim f_1 u s' \sim t s' \sim f_2 v s' \sim f_2 g'_2$$

( $\Rightarrow$ ) Soit  $F : A_\Sigma \rightarrow A'_\Sigma$  l'isomorphisme donné par le lemme précédent. On a que

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{P_\Sigma} & A_\Sigma \\ & \searrow^{P'_\Sigma} & \downarrow F \\ & & A'_\Sigma \end{array}$$

commute. Si  $\overline{f_1 g'_1} = \overline{f_2 g'_2}$ , alors comme  $\overline{f g'} = P_\Sigma(f)P_\Sigma(g)^{-1}$ , on a que  $F(\overline{f_1 g'_1}) = F(P_\Sigma(f_1)P_\Sigma(g_1)^{-1}) = P'_\Sigma(f_1)P'_\Sigma(g_1)^{-1} = (f_1, g_1)$ , et de même  $F(\overline{f_2 g'_2}) = (f_2, g_2)$ . Comme  $\overline{f_1 g'_1} = \overline{f_2 g'_2}$ , on doit avoir que la paire  $(f_1, g_1)$  est équivalente à  $(f_2, g_2)$ , ce qui implique par la définition de l'équivalence l'existence d'un diagramme commutatif tel que voulu. □

En utilisant ce dernier résultat, on constate que tout morphisme  $\overline{f g'} \in \text{Hom}_{A_\Sigma}(X, Y)$  peut être représenté sous forme d'un diagramme appelé par beaucoup d'auteurs un « toit » :

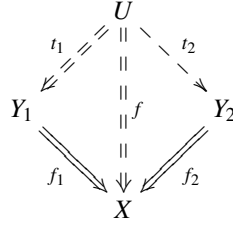
$$\begin{array}{ccc} & U & \\ g \swarrow & & \searrow f \\ X & & Y \end{array}$$

En fait, beaucoup d'entre eux préfèrent travailler directement avec les « toits » et définissent la localisation uniquement dans le cas des systèmes multiplicatifs en utilisant l'équivalence donnée dans le lemme précédent. On note aussi que le dual du théorème est vrai car la définition de système multiplicatif est auto-duale et donc toutes les constructions de la preuve peuvent être dualisées. On peut donc aussi représenter un morphisme  $\alpha \in \text{Hom}_{A_\Sigma}(X, Y)$  par un « toit » dual :

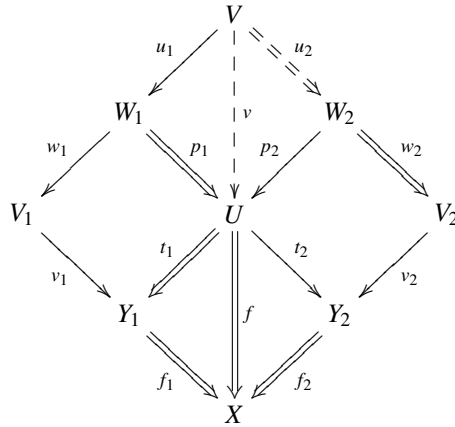
$$\begin{array}{ccc} & \hat{U} & \\ \hat{g} \swarrow & & \nwarrow \hat{f} \\ X & & Y \end{array}$$

c'est-à-dire par la classe d'équivalence de la paire  $(\hat{f}, \hat{g})$  en prenant comme définition de la relation d'équivalence la définition duale de celle donnée dans le dernier théorème.

Nous pouvons à l'aide de cette représentation des morphismes de la localisation étendre la définition à une catégorie qui est une classe propre. Le problème dans la définition de la localisation, c'est qu'il faut que  $\text{Hom}_{A_\Sigma}(X, Y)$  soit un ensemble. Nous donnons ici une condition suffisante pour que ce soit le cas. Une catégorie  $C$  est *petite* si  $\text{Ob}(C)$  est un ensemble. On dit que  $\Sigma$  est système multiplicatif *localement petit* si pour chaque  $X \in \text{Ob}(A)$  la catégorie  $\Sigma_X$  est petite pour tout objet  $X$  de  $A$ , où on pose que  $\Sigma_X$  est la catégorie donnée par  $\text{Ob}(\Sigma_X) = \{f: Y \rightrightarrows X \mid \exists t: Z \rightarrow Y, ft \in \Sigma\}$  et pour  $f_1: Y_1 \rightrightarrows X, f_2: Y_2 \rightrightarrows X$ , on pose  $\text{Hom}_{\Sigma_X}(f_1, f_2) = \{t: Y_2 \rightarrow Y_1 \mid f_2 = f_1 t, t \in \text{Fl}(A)\}$ , et avec comme composition la composition de morphismes dans  $A$ . On peut prendre la fermeture  $\Sigma'_X$  de  $\Sigma_X$  : c'est la plus petite sous-catégorie de la catégorie de tout les morphismes de codomaine  $X$  - les morphismes entre deux objets  $f_1: Y_1 \rightarrow X$  et  $f_2: Y_2 \rightarrow X$  les morphismes  $: Y_2 \rightarrow Y_1$  de  $A$  faisant commuter le triangle obtenu - telle que si  $g_1: U_1 \rightarrow X$  et  $g_2: U_2 \rightarrow X$  sont dans  $\text{Ob}(\Sigma'_X)$ , alors on a aussi  $g \in \text{Ob}(\Sigma'_X)$ , où  $g$  est donné par SM2 comme dans le diagramme suivant :



Tout les morphismes obtenus par SM2 de cette façon sont dans  $\text{Ob}(\Sigma'_X)$  : comme nous avons par définition de  $\Sigma'_X$  des morphismes  $v_1: V_1 \rightarrow Y_1$  et  $v_2: V_2 \rightarrow Y_2$  tels que  $f_1 v_1, f_2 v_2 \in \Sigma$ . On applique SM2 à trois reprises au diagramme précédent pour obtenir le diagramme commutatif suivant :



où  $w_1, p_1$  et  $w_2, p_2$  sont tels que  $f_1 v_1 w_1 = f v_1$  et  $f_2 v_2 w_2 = f v_2$  respectivement et où  $u_1$  et  $u_2$  sont tels que le carré du haut commute. Comme on a que  $f v = (f_2 v_2) w_2 u_2 \in \Sigma$  par SM1, on a montré que  $f \in \text{Ob}(\Sigma'_X)$ .

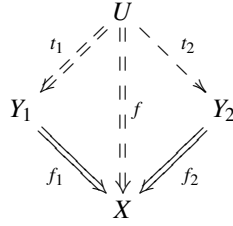
$\Sigma'_X$  est petite car on ajoute à  $\Sigma_X$ , qui est petite, un ensemble de morphismes pour

l'obtenir, et est une catégorie filtrée. Rappelons qu'une catégorie filtrée  $C$  est une catégorie satisfaisant les trois conditions suivantes :

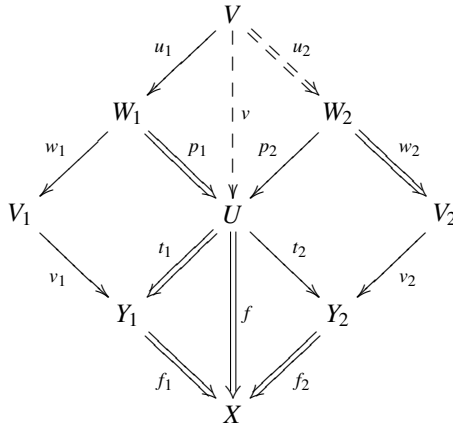
- $C$  est non-vide
- Pour chaque paire d'objets  $X, Y$  de  $C$ , il existe un troisième objet  $Z$  et des morphismes  $X \rightarrow Z \leftarrow Y$ .
- Pour toute paire de morphismes  $f, g : X \rightarrow Y$  il existe un troisième morphisme  $h : Y \rightarrow Z$  tel que  $hf = hg$ .

Vérifions que ces conditions sont satisfaites dans  $\Sigma'_X$  :

- $\Sigma'_X$  est non-vide car par SM1  $Id_X \in \Sigma$  est un objet de  $\Sigma_X$
- pour chaque paire d'objets  $f_1 : Y_1 \rightrightarrows X, f_2 : Y_2 \rightrightarrows X$  de  $\Sigma_X$ , il existe un objet  $f : U \rightrightarrows X$  et des morphismes  $f_1 \xrightarrow{t_1} f \xleftarrow{t_2} f_2$ . En effet, pour toute telle paire  $f_1, f_2$ , SM2 nous donne l'existence d'un diagramme commutatif



où  $f = f_1 g_1$ . Comme  $f$  n'est pas nécessairement dans  $Ob(\Sigma_X)$ , c'est ici que nous utilisons la propriété de complétude de  $\Sigma'_X$  : nous avons par définition de  $\Sigma'_X$  des morphismes  $v_1 : V_1 \rightarrow Y_1$  et  $v_2 : V_2 \rightarrow Y_2$  tels que  $f_1 v_1, f_2 v_2 \in \Sigma$ . On applique SM2 à trois reprises au diagramme précédent pour obtenir le diagramme commutatif suivant :



où  $w_1, p_1$  et  $w_2, p_2$  sont tels que  $f_1 v_1 w_1 = f v_1$  et  $f_2 v_2 w_2 = f v_2$  respectivement et où  $u_1$  et  $u_2$  sont tels que le carré du haut commute. Comme on a que  $f v = (f_2 v_2) w_2 u_2 \in \Sigma$  par SM1, on a montré que  $f \in Ob(\Sigma'_X)$ .

- si  $t_1, t_2$  sont des morphismes allant de  $f_1 : Y_1 \rightrightarrows X$  à  $f_2 : Y_2 \rightrightarrows X$ , alors dans  $\Sigma_X$  il existe un morphisme  $s : f_2 \rightrightarrows f_3, f_3 : Y_3 \rightrightarrows X$ , tel que  $st_1 = st_2$  : en

effet, comme on a que  $f_1 t_1 = f_1 t_2$  et que  $f_1 \in \Sigma$ , par SM3 il existe un morphisme  $s : Y_3 \rightrightarrows Y_2$  tels que  $t_1 s = t_2 s$ . Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
 Y_1 & \xleftarrow{t_2} & Y_2 & \xleftarrow{s} & Y_3 \\
 \searrow^{f_1} & & \downarrow^{f_2} & \swarrow^{f_2 s} & \\
 & & X & & 
 \end{array}$$

Pour avoir le résultat, il faut montrer que  $f_2 s \in \text{Ob}(\Sigma'_X)$ . Comme  $f_2 \in \text{Ob}(\Sigma'_X)$ , il a un morphisme  $u_2 : U_2 \rightrightarrows Y_2$  tel que  $f_2 u_2 \in \Sigma$ . En appliquant SM2 aux morphismes  $f_2 u_2$  et  $f_2 s$ , on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U_2 & \xleftarrow{t} & U_3 \\
 & & \downarrow^{u_2} & & \downarrow^{u_3} \\
 Y_1 & \xleftarrow{t_2} & Y_2 & \xleftarrow{s} & Y_3 \\
 \searrow^{f_1} & & \downarrow^{f_2} & \swarrow^{f_2 s} & \\
 & & X & & 
 \end{array}$$

Comme par SM1  $f_2 s u_3 = f_2 u_2 t \in \Sigma$ , on a bien que  $f_2 s \in \text{Ob}(\Sigma'_X)$ .

On considère pour chaque objet  $Y$  de  $A$  le foncteur  $F_Y : \Sigma_X \rightarrow \text{Ens}$  envoyant  $g \in \text{Ob}(\Sigma_X)$  sur l'ensemble des paires  $(f, g)$ , où les  $f \in \text{Fl}(A)$  sont tels que  $X \xleftarrow{g} U \xrightarrow{f} Y$ , et envoyant un morphisme  $t : g_1 \rightarrow g_2$  de  $\Sigma'_X$  sur la fonction prenant une paire  $(f, g_1)$  pour l'envoyer sur la paire  $(ft, g_1 t) = (ft, g_2)$  :

$$\begin{array}{ccc}
 X \xleftarrow{g_1} U_1 \xrightarrow{f_1} Y & & \\
 \downarrow t & & \\
 X \xleftarrow{g_2} U_2 \xrightarrow{f_2} Y & & 
 \end{array}$$

On définit maintenant  $\text{Hom}_{A_\Sigma}(X, Y)$  comme étant la colimite du foncteur  $F_Y$  – on peut aussi voir [Weibel] pour la définition de ce concept. Le fait que  $\Sigma'_X$  soit filtrée nous donne par les propriétés des colimites que l'on peut considérer  $\text{Hom}_{A_\Sigma}(X, Y)$  comme l'ensemble donné par les classes d'équivalences de paires comme dans le théorème 2 : en effet, dans le cas de la colimite, deux paires

$$X \xleftarrow{g_1} U_1 \xrightarrow{f_1} Y \text{ et } X \xleftarrow{g_2} U_2 \xrightarrow{f_2} Y$$

sont équivalentes s'il existe une autre paire  $X \xleftarrow{t} T \xrightarrow{s} Y$  et des morphismes  $t_1 : g_1 \rightarrow t$  et  $t_2 : g_2 \rightarrow t$  dans  $\Sigma'_X$  tels que les images de  $(f_1, g_1)$  et  $(f_2, g_2)$  par  $F_Y(t_1)$  et  $F_Y(t_2)$  respectivement soient  $(s, t)$ , c'est-à-dire, par définition de  $F_Y$  sur les mor-

phismes, s'il y a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xleftarrow{g_1} & U_1 & \xrightarrow{f_1} & Y \\
 \parallel & & \uparrow t_1 & & \parallel \\
 X & \xleftarrow{t} & T & \xrightarrow{s} & Y \\
 \parallel & & \downarrow t_2 & & \parallel \\
 X & \xleftarrow{g_2} & U_1 & \xrightarrow{f_2} & Y
 \end{array}$$

ce qui est exactement la définition de l'équivalence de paire donnée dans le dernier théorème. On remarque enfin qu'on peut dualiser cette construction, ce qui nous assure aussi que si on veut utiliser la représentation par des toits duals, on peut alors faire une construction similaire. Si la catégorie  $\hat{\Sigma}_Y$  définie de manière duale à  $\Sigma_X$  (les objets sont les flèches de  $\Sigma$  de domaine  $Y$ ) est un ensemble pour tout  $Y$ , la famille des morphismes de  $X$  à  $Y$  dans  $A_\Sigma$  est aussi un ensemble. Nous supposons par la suite que tout les systèmes multiplicatifs sont localement petits.

La représentation donnée dans le dernier corollaire permet aussi de montrer le résultat suivant concernant les sous-catégories d'une catégorie obtenue par localisation.

**Théorème 3.** *Soit  $B$  une sous-catégorie pleine d'une catégorie quelconque  $A$  et soit  $\Sigma$  un système multiplicatif de  $A$  tel que*

- (1)  $\Sigma(B) = \Sigma \cap Fl(B)$  est un système multiplicatif de  $B$
- (2) Si  $f : Y \rightrightarrows X$  est dans  $\Sigma$  et  $X \in Ob(B)$ , alors il existe un morphisme  $t : Z \rightrightarrows Y$  tel que  $st \in \Sigma$  et  $Z \in Ob(B)$

alors  $B_{\Sigma(B)}$  est une sous-catégorie pleine de  $A_\Sigma$ .

*Démonstration.* Si  $I : B \rightarrow A$  est le foncteur d'inclusion, on peut appliquer la propriété universelle de la localisation pour obtenir un foncteur  $\bar{I} :$

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{I} & A \\
 P_{\Sigma(B)} \downarrow & & \downarrow P_\Sigma \\
 B_{\Sigma(B)} & \xrightarrow{\bar{I}} & A_\Sigma
 \end{array}$$

Par la preuve de la propriété universelle de la localisation, on a que  $\bar{I}$  envoie le morphisme  $\overline{f g'}$  sur le morphisme

$$\bar{I}(\overline{f g'}) = P_\Sigma(f) P_\Sigma(g)^{-1}$$

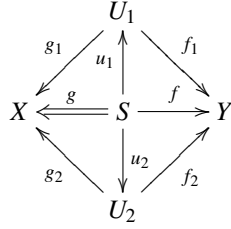
Montrons que  $\bar{I}$  est pleinement fidèle, c'est-à-dire que la fonction

$$\bar{I} : \text{Hom}_{B_{\Sigma(B)}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{A_\Sigma(A)}(X, Y)$$

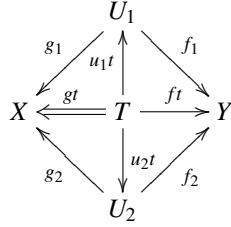
est bijective. Elle est injective : si  $\overline{f_1 g'_1} = \overline{f_2 g'_2}$  dans  $A_\Sigma$ , où  $f_1, f_2, g'_1, g'_2$  sont des mor-



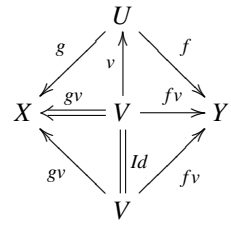
phismes de  $B$ , alors on a un diagramme commutatif dans  $A$



Comme  $g \in \Sigma$  et  $X$  est dans  $B$ , on peut utiliser l'hypothèse (2) pour obtenir un morphisme  $t : T \rightarrow S$  tel que  $T$  est dans  $B$  et  $gt \in \Sigma$ . Comme  $gt$  va d'un objet de  $B$  à un objet de  $B$  et que  $B$  est une sous-catégorie pleine de  $A$ , alors  $gt$  est un morphisme de  $B$ , donc  $gt \in \Sigma(B)$ . On a donc le diagramme commutatif dans  $B$  :



ce qui prouve que  $\overline{f_1 g'_1} = \overline{f_2 g'_2}$  dans  $B_{\Sigma(B)}$ . On montre maintenant que la fonction est surjective : si  $\overline{f g'}$  est un morphisme dans  $A_{\Sigma}$ , on doit montrer qu'il est équivalent à l'image d'un morphisme de  $B_{\Sigma(B)}$ . Soit  $X \xleftarrow{g} U \xrightarrow{f} Y$  représentant un morphisme de  $A_{\Sigma}$ . Par la condition (2), il existe un morphisme  $v : V \rightarrow U$  tel que  $V$  est un objet de  $B$  et  $gv \in \Sigma$ . On a alors le diagramme commutatif de  $B$  :



et donc on a montré que  $\overline{f g'}$  est équivalent dans  $A_{\Sigma}$  à l'image par  $\bar{\cdot}$  du morphisme  $(fv)(gv)'$ .  $\square$

Le principal intérêt des systèmes multiplicatifs est qu'ils permettent de démontrer le résultat suivant :

**Théorème 4.** *Soit  $\Sigma$  un système multiplicatif dans une catégorie additive  $A$ , alors  $g \in \Sigma$ ; alors la localisation  $A_{\Sigma}$  est aussi une catégorie additive et le foncteur  $P_{\Sigma} : A \rightarrow A_{\Sigma}$  est additif.*

*Démonstration.* On commence par munir  $\text{Hom}_{A_\Sigma}(X, Y)$  d'une structure de groupe abélien. On remarque que dans la discussion précédente montrant que  $\text{Hom}_{A_\Sigma}(X, Y)$  est un ensemble, on peut pour chaque  $g \in \Sigma'_X$  munir canoniquement  $F_Y(g)$  d'une structure de groupe abélien. En effet, si  $(f_1, g)$  et  $(f_2, g)$  sont dans  $F_Y(g)$ ,

$$X \xleftarrow{g} U \xrightleftharpoons[f_2]{f_1} Y$$

alors on définit leur somme comme étant la paire  $(f_1 + f_2, g)$

$$X \xleftarrow{g} U \xrightarrow{f_1+f_2} Y$$

Il est évident que cela donne à  $F_Y(g)$  une structure de groupe abélien isomorphe à celle de  $\text{Hom}_A(U, Y)$ .

Si  $t$  est un morphisme de  $g_1$  à  $g_2$  dans  $\Sigma'_X$ , alors  $F_Y(t)$  est un homomorphisme de groupe : soit  $(f_1, g)$  et  $(f_2, g)$  dans  $F_Y(g)$ . On a que

$$\begin{aligned} [F_Y(t)]((f_1, g) + (f_2, g)) &= ((f_1 + f_2)t, gt) \\ &= (f_1t + f_2t, gt) \\ &= (f_1t, gt) + (f_2t, gt) \\ &= [F_Y(t)]((f_1, g)) + [F_Y(t)]((f_2, g)) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{gt} & U \xrightarrow{(f_1+f_2)t} Y \\ & & \downarrow t \\ X & \xleftarrow{g} & U \xrightarrow{(f_1+f_2)} Y \end{array}$$

On a ainsi montré que le foncteur  $F_Y$  est un foncteur allant de  $\Sigma'_X$  à la catégorie des  $\mathbb{Z}$ -modules. La limite,  $\text{Hom}_{A_\Sigma}(X, Y)$  est donc un groupe abélien. On peut voir [Freyd] pour la preuve que cette limite existe dans la catégorie des groupes abéliens.

La somme de deux morphismes  $\alpha_1, \alpha_2 \in \text{Hom}_{A_\Sigma}(X, Y)$  peut être trouvée explicitement de la manière suivante. Comme  $\Sigma$  est un système multiplicatif, nous pouvons écrire  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  comme  $\overline{f_1 g'_1}$  et  $\overline{f_2 g'_2}$  respectivement. Il faut faire la somme de ces deux paires :

$$X \xleftarrow{g_1} U_1 \xrightarrow{f_1} Y$$

$$X \xleftarrow{g_2} U_2 \xrightarrow{f_2} Y$$

Il faut ramener cette somme à une somme de paires dans  $F_Y(g)$ , pour un certain morphisme  $g : U \implies X$ . On trouve un "dénominateur commun" en utilisant SM2 : il existe

des morphismes  $u_1, u_2$  tels que  $g_1 u_1 = g_2 u_2$ . On pose  $g = g_1 u_1 \in \Sigma$ .

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xleftarrow{g_1} U_1 & \xrightarrow{f_1} Y \\
 & \uparrow u_1 & \\
 X & \xleftarrow{g} U & \xrightarrow{f_1 u_1} Y \\
 & \downarrow u_2 & \\
 X & \xleftarrow{g_2} U_2 & \xrightarrow{f_2} Y
 \end{array}$$

On remarque que  $F_Y(u_1)$  envoie les paires  $(g_1, f_1)$  et  $(g_2, f_2)$  sur les paires  $(g, f_1 u_1)$  et  $(g, f_2 u_2)$  respectivement, et donc par la relation d'équivalence définissant la colimite,  $(g_1, f_1)$  est équivalente à  $(g, f_1 u_1)$  et  $(g_2, f_2)$  est équivalente à  $(g, f_2 u_2)$ . Ainsi, pour faire la somme  $(g_1, f_1)$  et  $(g_2, f_2)$  il est suffisant de connaître la somme de  $(g, f_1 u_1)$  et  $(g, f_2 u_2)$ . On peut maintenant faire la somme dans  $F_Y(g)$  pour obtenir

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xleftarrow{g_1} U_1 & \xrightarrow{f_1} Y \\
 & \uparrow u_1 & \\
 X & \xleftarrow{g} U & \xrightarrow{f} Y \\
 & \downarrow u_2 & \\
 X & \xleftarrow{g_2} U_2 & \xrightarrow{f_2} Y
 \end{array}$$

où  $f = f_1 u_1 + f_2 u_2$ .

Montrons que la composition est bilinéaire. Commençons par montrer qu'elle l'est dans la composante de gauche. Supposons que nous composons un morphisme  $X \xleftarrow{t} V \xrightarrow{s} Y$  avec la somme de deux morphismes que nous supposons sans perte de généralité comme ayant un "dénominateur commun", c'est-à-dire que nous les prendrons de la forme

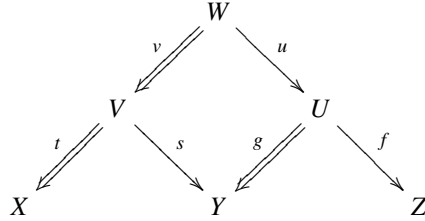
$$Y \xleftarrow{g} U \xrightarrow{f_1} Z$$

$$Y \xleftarrow{g} U \xrightarrow{f_2} Z$$

S'ils n'ont pas cette forme, nous pouvons toujours les y ramener par la méthode décrite plus haut : comme les paires obtenues par cette méthode sont équivalentes aux paires données au départ et que la somme et la composition sont bien définies, le résultat trouvé en additionnant et en composant les morphismes reste le même.

Soit  $(g, f_1 + f_2)$  la somme des deux morphismes donnés. Si on compose  $(s, t)$  et

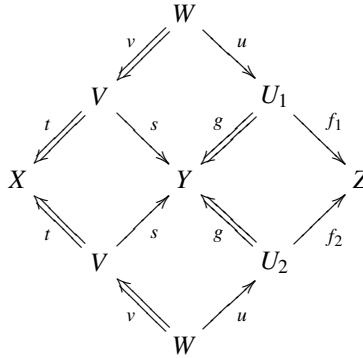
$(g, f)$



on obtient la paire

$$(fu, tv) = ((f_1 + f_2)u, tv) = (f_1u + f_2u, tv)$$

Mais cette paire est la somme des compositions de  $(s, t)$  avec  $(f_1, g)$  et  $(f_2, g)$ , car on remarque que ces compositions sont les paires  $(f_1u_1, tv_1)$  et  $(f_2u_2, tv_2)$  comme indiqué par le diagramme



On a alors que leur somme est  $(f_1u + f_2u, tv)$  ce qui montre que la somme de la composition par la gauche est bien la somme de la composition.

Pour montrer que la composition est aussi linéaire dans la composante de droite, on utilise l'argument dual fait en prenant comme représentant des morphismes des paires duales de la forme

$$X \xrightarrow{g} U \xleftarrow{f} Y$$

Pour montrer que  $A_\Sigma$  est additive, il reste à montrer que les sommes directes  $X \oplus Y$  existent. Soit  $X, Y \in \text{Ob}(A)$ . Comme  $A$  est additive,  $X \oplus Y$  existe dans  $A$  et on a le diagramme suivant :

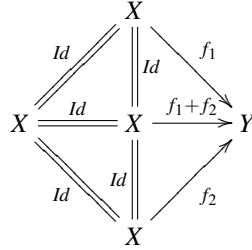
$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{q_X} \\ \xleftarrow{p_X} \end{array} X \oplus Y \begin{array}{c} \xrightarrow{p_Y} \\ \xleftarrow{q_Y} \end{array} Y$$

avec les relations  $p_X q_X = Id_X$ ,  $p_Y q_Y = Id_Y$ ,  $q_X p_X + q_Y p_Y = Id_{X \oplus Y}$ . On passe à la catégorie localisée en appliquant  $P_\Sigma$  et on obtient :

$$P_\Sigma(X) \begin{array}{c} \xrightarrow{P_\Sigma(q_X)} \\ \xleftarrow{P_\Sigma(p_X)} \end{array} P_\Sigma(X \oplus Y) \begin{array}{c} \xrightarrow{P_\Sigma(p_Y)} \\ \xleftarrow{P_\Sigma(q_Y)} \end{array} P_\Sigma(Y)$$

avec les relations  $\overline{p_X q_X} = \overline{Id_X}$ ,  $\overline{p_Y q_Y} = \overline{Id_Y}$ ,  $\overline{q_X p_X} + \overline{q_Y p_Y} = \overline{Id_{X \oplus Y}}$ . Comme la somme directe dans une catégorie abélienne peut être définie comme étant un objet avec des morphismes vérifiant ces relations, on a montré que  $A_\Sigma$  admet des sommes directe et donc qu'elle est une catégorie additive.

Pour achever la démonstration du théorème, on remarque que le foncteur  $P_\Sigma$  est additif car si  $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$  sont des morphismes dans  $A$ , alors  $P_\Sigma(f_1 + f_2) = P_\Sigma(f_1) + P_\Sigma(f_2)$  puisque par la commutativité du diagramme suivant et la définition de la somme dans  $A_\Sigma$ , on a que  $P_\Sigma(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)Id = \overline{f_1 Id} + \overline{f_2 Id} = P_\Sigma(f_1 + f_2)$  :



□

On verra plus loin qu'en général la localisation d'une catégorie abélienne n'est pas abélienne. Le contre-exemple est la localisation de  $K(A)$  par rapport à la famille des quasi-isomorphismes, où  $A$  est une catégorie abélienne.

### 1.3 Quelques morphismes dans les catégories localisées

Nous verrons dans cette section comment on peut reconnaître quelques types de morphismes dans les catégories obtenues par localisation par rapport à un système multiplicatif  $\Sigma$ . Ces résultats, en plus d'éclairer la structure d'une catégorie localisée, seront utilisés dans les chapitres subséquents.

La proposition suivante donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que la localisation d'un morphisme soit le morphisme 0.

**Lemme 2.** Soit  $A$  une catégorie additive,  $\Sigma$  un système multiplicatif de  $A$  et  $f \in \text{Hom}_A(X, Y)$ . On a alors les équivalences :

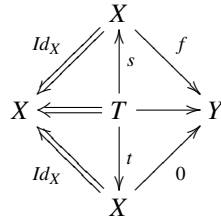
$$P_\Sigma(f) = 0 \stackrel{(1)}{\iff} \exists s \in \Sigma f s = 0 \stackrel{(2)}{\iff} \exists t \in \Sigma t f = 0$$

*Démonstration.* Montrons d'abord l'équivalence (2) : elle est une conséquence directe de l'axiome SM3 : il suffit de prendre  $g = 0$  dans l'énoncé de l'axiome pour obtenir le résultat. Montrons maintenant l'équivalence (1) :

( $\Leftarrow$ ) Si  $s : Z \rightarrow X$  est tel que  $f s = 0$ , alors  $0 = P_\Sigma(f s) = P_\Sigma(f) P_\Sigma(s)$  et puisque  $P_\Sigma(s)$  est un isomorphisme dans  $A_\Sigma$ , on a donc que  $0 = P_\Sigma(f) P_\Sigma(s) P_\Sigma(s)^{-1} = P_\Sigma(f)$ .

( $\Rightarrow$ ) Si  $P_\Sigma(f) = 0$ , par définition de  $P_\Sigma$  on a que  $\overline{f} = \overline{f \circ Id} = \overline{0 \circ Id}$ . Par le corollaire

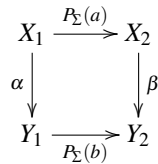
1, on a un diagramme commutatif :



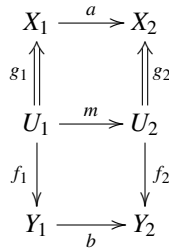
On a donc que  $fs = 0t = 0$ , c'est-à-dire qu'on a un  $s$  tel que voulu.  $\square$

Voici un corollaire qui sera utilisé lorsque nous discuterons des catégories triangulées.

**Corollaire 2.** Soit le diagramme commutatif de  $A_\Sigma$  suivant :



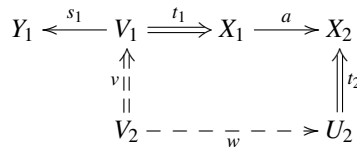
Alors il existe des morphismes  $f_1, f_2, g_1, g_2, m$  telles que le diagramme de  $A$  suivant commute :



*Démonstration.* Soit  $\alpha = \overline{s_1 t'_1} = P_\Sigma(s_1)P_\Sigma(t_1)^{-1}$  et  $\beta = \overline{s_2 t'_2} = P_\Sigma(s_2)P_\Sigma(t_2)^{-1}$ , avec  $X_1 \xleftarrow{t_1} V_1 \xrightarrow{s_1} Y_1$  et  $X_2 \xleftarrow{t_2} U_2 \xrightarrow{s_2} Y_2$ . On remarque que par hypothèse

$$P_\Sigma(b)P_\Sigma(s_1)P_\Sigma(t_1)^{-1} = P_\Sigma(s_2)P_\Sigma(t_2)^{-1}P_\Sigma(a)$$

Maintenant considérons le diagramme commutatif dans  $A$  obtenu par application de SM2 :



On a donc le diagramme suivant (l'existence de  $u$  sera montrée plus bas) où le carré du haut commute et où  $t_1v \in \Sigma$  par SM1 :

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 & \xrightarrow{a} & X_2 \\
 t_1v \uparrow \parallel & & \uparrow \parallel t_2 \\
 U_1 = \overset{u}{=} \Rightarrow V_2 & \xrightarrow{w} & U_2 \\
 s_1v \downarrow & & \downarrow s_2 \\
 Y_1 & \xrightarrow{b} & Y_2
 \end{array}$$

À l'aide de ce diagramme et de la remarque faite au début de cette démonstration, on peut faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 P_\Sigma(bs_1v - s_2w) &= P_\Sigma(b)P_\Sigma(s_1)P_\Sigma(v) - P_\Sigma(s_2)P_\Sigma(w) \\
 &= (P_\Sigma(b)P_\Sigma(s_1)P_\Sigma(t_1)^{-1})P_\Sigma(t_1)P_\Sigma(v) - P_\Sigma(s_2)P_\Sigma(w) \\
 &= P_\Sigma(s_2)P_\Sigma(t_2)^{-1}(P_\Sigma(a)P_\Sigma(t_1)P_\Sigma(v)) - P_\Sigma(s_2)P_\Sigma(w) \\
 &= P_\Sigma(s_2)P_\Sigma(t_1)^{-1}(P_\Sigma(t_2)P_\Sigma(w)) - P_\Sigma(s_2)P_\Sigma(w) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Par le lemme précédent, il existe un morphisme  $u : U_1 \Rightarrow V_2$  tel que  $u \in \Sigma$  et  $(bs_1v - t_2w)u = 0$ , c'est-à-dire que  $bs_1vu = t_2wu$ . Si on pose  $f_1 = s_1vu$ ,  $g_1 = t_1vu$ ,  $m = wu$  et évidemment  $f_2 = s_2$  et  $g_2 = t_2$ , on obtient le diagramme commutatif demandé dans l'énoncé du corollaire.  $\square$

**Corolaire 3.** Si  $f : X \rightarrow Y$  est un monomorphisme, alors  $P_\Sigma(f)$  est un monomorphisme.

Si  $f : X \rightarrow Y$  est un épimorphisme, alors  $P_\Sigma(f)$  est un épimorphisme.

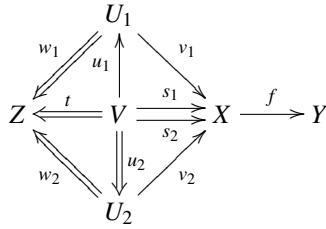
*Démonstration.* On prouvera la proposition dans le cas où  $f : X \rightarrow Y$  est un monomorphisme ; la preuve dans le cas d'un épimorphisme est similaire.

Soit  $\alpha, \beta \in \text{Hom}_{A_\Sigma}(Z, X)$  tels que  $P_\Sigma(f)\alpha = P_\Sigma(f)\beta$ .

$$Z \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} X \xrightarrow{P_\Sigma(f)} Y$$

On remarque qu'il est possible de représenter  $\alpha$  et  $\beta$  par des paires  $(s_1, t)$  et  $(s_2, t)$  ; en effet, soit  $(v_1, w_1)$  un représentant de  $\alpha$  et  $(v_2, w_2)$  un représentant de  $\beta$ . Alors par SM2 on peut trouver des morphismes  $u_1, u_2$  tels que  $w_1u_1 = w_2u_2 = t \in \Sigma$  (par SM1)

comme dans le diagramme de A suivant



où l'on pose  $s_1 = v_1 u_1$  et  $s_2 = v_2 u_2$ . On a donc que  $\alpha$  est représenté par  $(s_1, t)$  et  $\beta$  par  $(s_2, t)$ . Si on applique  $P_\Sigma$  au diagramme, on obtient que

$$P_\Sigma(f)P_\Sigma(s_2)P_\Sigma(t)^{-1} = P_\Sigma(f)P_\Sigma(s_1)P_\Sigma(t)^{-1}$$

et donc que  $P_\Sigma(f s_1 - f s_2) = 0$ , ce qui implique par le dernier théorème démontré qu'il existe un morphisme  $w : W \Rightarrow V$  tel que  $f s_1 w = f s_2 w$ . Comme  $f$  est un monomorphisme par hypothèse, alors  $s_1 w = s_2 w$  et  $P_\Sigma(s_1)P_\Sigma(w) = P_\Sigma(s_2)P_\Sigma(w)$ , ce qui implique que  $P_\Sigma(s_1) = P_\Sigma(s_2)$  puisque  $P_\Sigma(w)$  est un isomorphisme. Mais alors  $\alpha = P_\Sigma(s_1)P_\Sigma(t) = P_\Sigma(s_2)P_\Sigma(t) = \beta$ .  $\square$



## Chapitre 2

# Triangles dans les catégories de complexes

### 2.1 Cônes

Soit  $A$  une catégorie abélienne,  $C(A)$  la catégorie abélienne des complexes d'objets de  $A$  et  $K(A)$  la catégorie des complexes avec les morphismes modulo homotopie. On rappelle que  $K(A)$  est une catégorie additive, mais n'est pas une catégorie abélienne en général (voir par exemple [Grivel]p. 45). Nous voulons localiser la catégorie des complexes  $C(A)$  par la famille des quasi-isomorphismes et munir la catégorie obtenue d'une structure analogue à celle d'une catégorie abélienne. Le principal intérêt des catégories abéliennes est d'associer aux courtes suites exactes de longues suites exactes d'homologie et de pouvoir construire les foncteurs dérivés, nous voulons une structure permettant d'obtenir au moins ces deux types de résultats. Comme la localisation d'une catégorie abélienne n'est pas abélienne en général, il faudra chercher une nouvelle structure. Dans ce chapitre, nous étudierons la catégorie  $K(A)$  à l'aide de nouveaux objets mathématiques qui ont beaucoup de points en commun avec les courtes suites exactes. Nous verrons dans les chapitres suivants que les triangles permettent en général d'avoir les deux principaux types de résultats voulus, et donc qu'il est préférable de localiser  $K(A)$  par la famille des quasi-isomorphismes afin que l'on ait dans la catégorie résultante ces deux types de résultats.

Donnons premièrement quelques définitions. On définit le foncteur de translation  $T : C(A) \rightarrow C(A)$  par  $T(X^\cdot)^k = X^{k+1}$ ,  $d_{T(X^\cdot)}^{(k)} = -d_X^{(k+1)}$  et pour  $f^\cdot : X^\cdot \rightarrow Y^\cdot$ , on définit  $T(f)$  par  $T(f)^k = -f^{k+1}$ . Il est immédiat que  $T$  est un foncteur additif et est qu'il est un automorphisme de  $K(A)$ . En général, si  $T$  est un automorphisme de catégorie, on pose pour chaque  $n \in \mathbb{Z}$  que  $\text{Hom}^n(X^\cdot, Y^\cdot) = \text{Hom}(T^n(X^\cdot), Y^\cdot)$ . Si  $f \in \text{Hom}^n(X^\cdot, Y^\cdot)$ , on dit alors que  $f$  est de *degré*  $n$ . Pour le reste de ce chapitre,  $T$  désignera le foncteur de translation. On remarque que  $T$  induit naturellement un automorphisme  $K(A) \rightarrow K(A)$ .

Il nous faut ici introduire une notation que nous utiliserons fréquemment dans le reste de ce mémoire. Soit  $\bigoplus_{i \in I} X_i$  et  $\bigoplus_{j \in J} Y_j$  deux sommes directes dans  $A$ , avec comme

projections et injections entre la deuxième et les  $Y_j$  les morphismes  $p_j$  et  $q_j$  respectivement et comme projections et injections entre la première et les  $X_i$  les morphismes  $p_i$  et  $q_i$  respectivement. Si on a un morphisme  $f : \bigoplus_{i \in I} X_i \longrightarrow \bigoplus_{j \in J} Y_j$ , on peut lui associer la matrice  $(f_{ji})_{i \in I, j \in J}$ , où  $f_{ji} \stackrel{\text{def}}{=} p_i f q_j$ . Inversement, si on a une matrice  $(f_{ji})_{i \in I, j \in J}$ , avec  $f_{ij} : X_i \longrightarrow Y_j$ , on peut définir un morphisme  $f : \bigoplus_{i \in I} X_i \longrightarrow \bigoplus_{j \in J} Y_j$  en prenant l'unique morphisme, donné par la propriété universelle des sommes directes, tel que tout les carrés suivants soient commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i \in I} X_i & \xrightarrow{p_{i_0}} & X_{i_0} \\ \downarrow f & & \downarrow f_{i_0 j_0} \\ \bigoplus_{j \in J} Y_j & \xleftarrow{q_{(j_0)}} & Y_{j_0} \end{array}$$

pour tout  $i_0 \in I, j_0 \in J$ .

Montrons que cette notation a la propriété suivante : si on compose deux morphismes définis « matriciellement » comme on vient de le faire, le résultat est le morphisme obtenu en multipliant les deux matrices de la manière conventionnelle en utilisant comme somme la somme de morphismes et comme produit la composition. Soit  $(f_{ji}) : \bigoplus_{i \in I} X_i \longrightarrow \bigoplus_{j \in J} Y_j$  et  $(g_{kj}) : \bigoplus_{j \in J} Y_j \longrightarrow \bigoplus_{k \in K} Z_k$  deux telles matrices et  $f$  et  $g$  les morphismes entre les sommes directes correspondantes. Il faut montrer que l'élément générique  $h_{ki}$  de la matrice associée à  $gf$  est bien égal à  $\sum_{j \in J} g_{kj} f_{ji}$ . On le prouve par le calcul suivant, utilisant les propriétés universelles définissant  $f$  et  $g$  :

$$\begin{aligned} h_{ki} &= p_k g f q_i \\ &= p_k g \left( \sum_{j \in J} q_j p_j \right) f q_i \\ &= \sum_{j \in J} p_k g q_j p_j f q_i \\ &= \sum_{j \in J} g_{kj} f_{ji} \end{aligned}$$

On peut montrer de manière semblable que la somme de deux morphismes définis par des matrices est le morphisme défini par la somme des deux matrices.

Soit  $f : X \longrightarrow Y$  un morphisme de complexes dans  $C(A)$ . Le cône  $C_f$  du morphisme  $f$  est le complexe défini par  $C_f^k = X^{k+1} \oplus Y^k$  et  $d_{C_f}^k : C_f^k \longrightarrow C_f^{k+1}$  défini par

$$d_{C_f}^k = \begin{pmatrix} d_T^k(X) & 0 \\ T(f)^k & d_Y^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_X^{k+1} & 0 \\ -f^{k+1} & d_Y^k \end{pmatrix}$$

La notion de cône est née en topologie algébrique comme outil pour calculer certains groupes d'homotopie. On peut en trouver une description détaillée dans [Maunder] ou dans [Weibel].

Il faut s'assurer que  $C_f$  est un complexe, c'est-à-dire que  $d_{C_f}^2 = 0$  :

$$\begin{aligned} d_{C_f}^{k+1} \circ d_{C_f}^k &= \begin{pmatrix} d_{T(X)}^{k+1} & 0 \\ T(f)^{k+1} & d_Y^{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{T(X)}^k & 0 \\ T(f)^k & d_Y^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{T(X)}^{k+1} \circ d_{T(X)}^k & 0 \\ T(f)^{k+1} \circ T(f)^k + d_Y^{k+1} \circ T(f)^k & d_Y^{k+1} \circ d_Y^k \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le fait que la composante  $(2, 1)$  soit 0 se déduit de  $T(d_X)^k = -d_X^{k+1}$  et du fait que  $f$  est un morphisme de complexe, c'est-à-dire de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X^{k+1} & \xrightarrow{-d_{T(X)}^k} & X^{k+2} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow T(f)^k & & \downarrow T(f)^{k+1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & Y^{k+1} & \xrightarrow{d_Y^{k+1}} & Y^{k+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Le cône d'un morphisme  $f: X^\cdot \rightarrow Y^\cdot$  a la propriété suivante :

$$T(C_f) = T(X^{k+1} \oplus Y^k) = X^{k+2} \oplus Y^{k+1} = C_{T(f)}$$

et aussi

$$\begin{aligned} d_{T(C_f)}^k &= -d_{C_f}^{k+1} \\ &= - \begin{pmatrix} -d_X^{k+2} & 0 \\ -f^{k+2} & d_Y^{k+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -d_{T(X)}^{k+1} & 0 \\ -d_{T(f)}^{k+1} & d_{T(Y)}^k \end{pmatrix} \\ &= d_{C_{T(f)}} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que les complexes  $T(C_f)$  et  $C_{T(f)}$  sont égaux. On montre de manière similaire qu'en général si  $F: K(A) \rightarrow K(B)$  est un foncteur additif, alors  $F(C_f) = C_{F(f)}$ .

Soit  $X^\cdot, Y^\cdot \in K(A)$ . On remarque que comme  $T(X^\cdot) \oplus Y^\cdot$  est la somme directe de  $T(X^\cdot)$  et de  $Y^\cdot$ , on a la courte suite exacte scindée suivante :

$$T(X^\cdot) \begin{array}{c} \xrightarrow{q_X} \\ \xleftarrow{p_X} \end{array} T(X^\cdot) \oplus Y^\cdot \begin{array}{c} \xrightarrow{p_Y} \\ \xleftarrow{q_Y} \end{array} Y^\cdot$$

où  $p$  est la projection canonique et  $q$  est l'inclusion canonique. On peut voir  $q_X$  comme un morphisme de degré  $-1$  allant de  $T(X^\cdot) \oplus Y^\cdot$  à  $X^\cdot$  et de manière analogue  $p_X$  comme un morphisme de degré  $+1$ . Par la suite, on utilisera toujours les lettres  $p$  et  $q$  pour

désigner les morphismes de projection et d'inclusion canonique associés au cône d'un morphisme. On aura donc une suite de morphismes

$$X \cdot \xrightarrow{f} Y \cdot \xrightarrow{q_Y} C_f \xrightarrow{p_X} T(X \cdot)$$

On note enfin qu'en utilisant la notation matricielle, on a que  $q_Y^k = \begin{pmatrix} 0 \\ Id_Y \end{pmatrix}$  et  $p_X^k = (Id_{X^{k+1}}, 0)$ .

Le cône  $C_f$  d'un morphisme peut être vu comme une généralisation de  $\text{Ker}(f)$  et de  $\text{Coker}(f)$  dans le sens suivant : si  $f: X \rightarrow Y$  est un morphisme dans la catégorie abélienne  $A$ , alors on peut considérer les complexes concentrés au degré 0

$$\begin{array}{ccccccc} X \cdot = & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & & \downarrow 0 & & \downarrow f & & \downarrow 0 & & \\ Y \cdot = & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

et avec  $\hat{f}: X \cdot \rightarrow Y \cdot$  l'extension naturelle de  $f$  aux complexes  $X \cdot$  et  $Y \cdot$  comme donnée par le diagramme précédent.

On a alors que  $C_{\hat{f}} = \cdots \rightarrow 0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$  où  $Y$  est l'objet de degré 0. Clairement  $H^{-1}(C_{\hat{f}}) = \text{Ker}(f)$  et  $H^0(C_{\hat{f}}) = \text{Coker}(f)$ .

**Théorème 5.** Soit  $f \in \text{Hom}_{C(A)}(X, Y)$  ; dans la suite de  $K(A)$

$$X \cdot \xrightarrow{f} Y \cdot \xrightarrow{q_Y} C_f \xrightarrow{p_X} T(X \cdot) \xrightarrow{T(f)} T(Y \cdot) \xrightarrow{T(q_Y)} T(C_f) \xrightarrow{T(p_X)} T^2(X \cdot) \rightarrow \cdots$$

la composition de deux morphismes consécutifs est le morphisme nul.

*Démonstration.*  $p_X \circ q_Y = 0$  par les propriétés de la somme directe.

On montre que  $q_Y \circ f$  est homotope à 0 dans  $C(A)$ , donc égal à 0 dans  $K(A)$ . Pour ce faire, nous prenons pour morphisme homotopie le morphisme  $-q_X$  de degré  $-1$ . Il faut donc montrer que dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X^{k-1} & \xrightarrow{d_X^{k-1}} & X^k & \xrightarrow{d_X^k} & X^{k+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f^{k-1} & & \downarrow f^k & & \downarrow f^{k+1} & & \\ & & Y^{k-1} & \xrightarrow{-q_X^{k-1}} & Y^k & \xrightarrow{-q_X^k} & Y^{k+1} & & \\ & & \downarrow q_Y^{k-1} & & \downarrow q_Y^k & & \downarrow q_Y^{k+1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_f^{k-1} & \xrightarrow{d_{C_f}^{k-1}} & C_f^k & \xrightarrow{d_{C_f}^k} & C_f^{k+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

on a que  $q_X^k \circ d_X^k + d_{C_f}^{k-1} \circ q_X^{k-1} = q_Y^k \circ f^k$ . On vérifie cette égalité directement : le membre de droite est

$$q_Y^k f = \begin{pmatrix} 0 \\ Id_Y^k \end{pmatrix} (f^k) = \begin{pmatrix} 0 \\ f^k \end{pmatrix}$$

et le membre de gauche est

$$\begin{aligned}
-d_X^k \circ d_X^k - d_{C_f}^{k-1} \circ d_X^{k-1} &= - \begin{pmatrix} Id_X^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} (d_X^k) - \begin{pmatrix} d_{T(X)}^{k-1} & 0 \\ T(f)^{k-1} & d_Y^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id_X^k \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= - \begin{pmatrix} d_X^k \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -d_X^k \\ -f^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ f^k \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ce qui montre que  $q_Y \circ f$  est bien homotope à 0.

Un argument similaire montre que  $T(f) \circ p_X$  est homotope à 0, en prenant comme homotopie  $-p_Y$ . Comme  $T$  est un foncteur et que selon les propriétés des cônes données précédemment  $T(C_f^{cdot}) = C_{T(f)}$ , on peut prolonger par induction les résultats précédents à toute la suite :  $T(q_Y) \circ T(f) = T(q_Y \circ f) = T(0) = 0$ , etc.  $\square$

## 2.2 Triangles distingués

**Définition 2.** Soit  $A$  une catégorie abélienne.

(1) Un triangle dans  $K(A)$  est une suite de morphismes de la forme :

$$X \cdot \longrightarrow Y \cdot \longrightarrow Z \cdot \longrightarrow T(X \cdot)$$

(2) Un morphisme de triangles est un triplet  $(u, v, w)$  de morphismes de  $K(A)$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc}
X_1 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & T(X_1) \\
\downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow T(f) \\
X_2 & \longrightarrow & Y_2 & \longrightarrow & Z_2 & \longrightarrow & T(X_2)
\end{array}$$

(3) Deux triangles sont isomorphes s'il y a des morphismes de triangles  $f$  et  $g$  tels que  $f \circ g = Id$  et  $g \circ f = Id$ , où le morphisme de triangles  $Id$  est le triplet  $(Id_X, Id_Y, Id_Z)$ .

(4) Un triangle distingué est un triangle pour lequel il existe un morphisme  $f \in Fl(C(A))$  tel qu'il soit isomorphe au triangle

$$X \cdot \xrightarrow{f} Y \cdot \xrightarrow{q_Y} C_f \xrightarrow{p_X} T(X \cdot)$$

Par la suite, on appellera *triangle standard* tout triangle associé à un morphisme et à son cône comme dans la dernière partie de la définition précédente.

Le nom *triangle* est inspiré du fait que l'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
& Z & \\
h \swarrow & & \nwarrow g \\
X & \xrightarrow{f} & Y
\end{array}$$

où  $h$  est un morphisme de degré  $+1$ .

Voici deux propriétés des triangles qui montrent qu'ils définissent une structure proche de celle des suites exactes et qu'ils sont de bons candidats pour les remplacer puisqu'ils nous donnent aussi des longues suites exactes de cohomologie.

**Théorème 6.** *Au triangle  $X^\cdot \xrightarrow{f} Y^\cdot \xrightarrow{q_Y} C_f \xrightarrow{p_X} T(X^\cdot)$  on associe la longue suite exacte de cohomologie suivante :*

$$\cdots \longrightarrow H^k(X^\cdot) \xrightarrow{H^k(f)} H^k(Y^\cdot) \xrightarrow{H^k(q_Y)} H^k(C_f) \xrightarrow{H^k(p_X)} H^{k+1}(X^\cdot) \longrightarrow \cdots$$

*Démonstration.* Dans  $C(A)$  nous avons la courte suite exacte

$$0 \longrightarrow Y^\cdot \xrightarrow{q_Y} C_f \xrightarrow{p_X} T(X^\cdot) \longrightarrow 0$$

ce qui nous donne la longue suite exacte de cohomologie

$$\cdots \longrightarrow H^k(Y^\cdot) \xrightarrow{H^k(q_Y)} H^k(C_f) \xrightarrow{H^k(p_X)} H^k(T(X^\cdot)) \xrightarrow{\delta^k} H^{k+1}(Y^\cdot) \longrightarrow \cdots$$

Comme  $H^k(T(X^\cdot)) = H^{k+1}(X^\cdot)$ , on voit que si nous montrons que  $H(T(f)) = \delta$ , nous aurons terminé la démonstration. Nous utiliserons pour la suite de la démonstration le fait que toute catégorie abélienne petite peut être plongée dans une catégorie de modules, prouvé dans [Mitchell, p. 151]. On restreint donc la catégorie  $C(A)$  à une sous-catégorie pleine contenant tout les morphismes et objets (il y en a un nombre fini !) impliqués dans la suite de la démonstration. On peut ainsi supposer que tout nos objets sont des modules classiques, et ont des éléments.

Soit  $\zeta \in H^k(T(X^\cdot)) = H^{k+1}(X^\cdot)$  représenté par  $x^{(k+1)} \in \text{Ker}(d_X^{k+1}) \subset X^{k+1}$ . On note la classe d'homologie de  $x^{(k+1)}$  par  $\overline{x^{(k+1)}}$ . On a que par définition de  $H$ ,  $[H^{k+1}(f)](\overline{x^{(k+1)}}) = \overline{f^{k+1}(x^{(k+1)})}$ . Nous avons le diagramme commutatif suivant de  $A$  :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y^k & \xrightarrow{q_Y^k} & C_f^k & \xrightarrow{p_X^k} & X^{k+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d_Y^k & & \downarrow d_{C_f}^k & & \downarrow -d_X^{k+1} \\ 0 & \longrightarrow & Y^{k+1} & \xrightarrow{q_Y^{k+1}} & C_f^{k+1} & \xrightarrow{p_X^{k+1}} & X^{k+2} \longrightarrow 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes. On sait que  $\delta^k(\overline{x^{(k+1)}}) = \overline{y^{(k+1)}}$ , où  $y^{(k+1)}$  est tel que  $q_Y^{k+1}(y^{(k+1)}) = d_{C_f}^k(x_1^{(k+1)}, y_1^{(k)})$ ,  $(x_1^{(k+1)}, y_1^{(k)})$  étant tel que  $p_X^k(x_1^{(k+1)}, y_1^{(k)}) = x^{(k+1)}$ . On peut prendre  $(x_1^{(k+1)}, y_1^{(k)}) = (x^{(k+1)}, 0)$ , et puisqu'on a que

$$d_{C_f}^k(x^{(k+1)}, 0) = (-d_X^{k+1}(x^{(k+1)}), -f^{k+1}(x^{(k+1)}))$$

par définition de  $d_{C_f}$ , on voit que l'on peut prendre  $y^{(k+1)} = -f^{k+1}(x^{(k+1)})$ , ce qui nous donne que

$$\delta^k(\overline{x^{(k+1)}}) = \overline{-f^{k+1}(x^{(k+1)})} = [H^{k+1}(-f)](x^{(k+1)}) = [H^k(T(f))](x^{(k+1)})$$

pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . On a ainsi montré que  $H^k(T(f)) = \delta^k$  et donc, puisque la longue suite contenant  $\delta$  est exacte, celle contenant  $f$  l'est aussi.  $\square$

**Corolaire 4.**  $f : X^\cdot \rightarrow Y^\cdot$  est un quasi-isomorphisme si et seulement si  $C_f$  est acyclique.

*Démonstration.* Par le théorème précédent, on a la longue suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H^k(X^\cdot) \xrightarrow{H^k(f)} H^k(Y^\cdot) \xrightarrow{H^k(q_Y)} H^k(C_f) \xrightarrow{H^k(p_X)} H^{k+1}(X^\cdot) \longrightarrow \cdots$$

Donc  $H^k(C_f) = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow H^k(f)$  est un isomorphisme pour tout  $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow f$  est un quasi-isomorphisme.  $\square$

**Théorème 7.** Si dans la suite  $0 \rightarrow X^\cdot \xrightarrow{f} Y^\cdot \xrightarrow{g} Z^\cdot \rightarrow 0$  de  $C(A)$  on a que  $gf = 0$ , alors il existe un morphisme  $u : C_f \rightarrow Z^\cdot$  tel que

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X^\cdot & \xrightarrow{f} & Y^\cdot & \xrightarrow{g} & Z^\cdot \longrightarrow 0 \\ & & & & & \searrow^{q_Y} & \uparrow^u \\ & & & & & & C_f \end{array}$$

commute. De plus, si la suite est exacte, alors  $u$  est un quasi-isomorphisme, c'est-à-dire que  $H(u)$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* On définit le morphisme  $u : C_f \rightarrow Z^\cdot$  par  $u^k = g^k p_Y^k$ . Si  $u$  est bien un morphisme de complexes, on a que  $uq_Y = g$  par définition : on vérifie donc que pour chaque  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & Z^{(k)} & \xrightarrow{d_Z} & Z^{k+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow^{u^k} & & \uparrow^{u^{k+1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_f^k & \xrightarrow{d_{C_f}} & C_f^{k+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

commute. En utilisant la notation matricielle, on a que  $u^k = \begin{pmatrix} 0 & g^k \end{pmatrix}$  et donc que

$$\begin{aligned} u^{k+1} d_{C_f}^k &= \begin{pmatrix} 0 & g^{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_T^k(X) & 0 \\ T(f^k) & d_Y^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g^{k+1} \circ f^k & g^{k+1} d_Y^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & d_Z^k g^k \end{pmatrix} \\ &= d_Z^k u^k \end{aligned}$$

Si la suite donnée est exacte, alors comme on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X^\cdot & \xrightarrow{f} & Y^\cdot & \xrightarrow{g} & Z^\cdot \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel \text{Id}_X & & \parallel -\text{Id}_Y & & \uparrow u \\
 & & X^\cdot & \xrightarrow{-f} & Y^\cdot & \xrightarrow{-q_Y} & C_f \xrightarrow{-p_X} T(X^\cdot)
 \end{array}$$

car  $gf = 0$  par hypothèse et car  $g : Y^\cdot \rightarrow Z^\cdot$  est un morphisme de complexes. On peut maintenant utiliser le théorème précédent et les longues suites exactes d'homologie pour obtenir le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H^k(X^\cdot) & \xrightarrow{f^*} & H^k(Y^\cdot) & \xrightarrow{g^*} & H^k(Z^\cdot) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(X^\cdot) & \xrightarrow{f^*} & H^{k+1}(Y^\cdot) & \longrightarrow \dots \\
 & & \parallel \text{Id}_{H(X^\cdot)} & & \parallel -\text{Id}_{H(Y^\cdot)} & & \uparrow H(u) & & \parallel \text{Id}_{H(X^\cdot)} & & \parallel \text{Id}_{H(Y^\cdot)} & \\
 \dots & \longrightarrow & H^k(X^\cdot) & \xrightarrow{-f^*} & H^k(Y^\cdot) & \xrightarrow{-i^*} & H^k(C_f) & \xrightarrow{-p^*} & H^{k+1}(X^\cdot) & \xrightarrow{f^*} & H^{k+1}(Y^\cdot) & \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Par le lemme des cinq, on a que  $H(u)$  est un isomorphisme. □

Les six propriétés suivantes sont suffisantes pour avoir l'essentiel des résultats concernant les triangles distingués dans  $K(A)$ , comme nous le verrons dans le chapitre suivant, et serviront donc de point de départ pour les généraliser.

**Théorème 8.**

- (TR0) Tout triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué.
- (TR1) Le triangle  $X^\cdot \xrightarrow{\text{Id}_X} X^\cdot \rightarrow 0 \rightarrow T(X^\cdot)$  est distingué pour tout complexe  $X^\cdot$ .
- (TR2) Pour chaque morphisme  $f : X^\cdot \rightarrow Y^\cdot$  de  $K(A)$  il existe un triangle distingué

$$X^\cdot \xrightarrow{f} Y^\cdot \longrightarrow Z^\cdot \longrightarrow T(X^\cdot)$$

(TR3)

$$X^\cdot \xrightarrow{f} Y^\cdot \xrightarrow{g} Z^\cdot \xrightarrow{h} T(X^\cdot)$$

est distingué si et seulement si

$$Y^\cdot \rightarrow Z^\cdot \rightarrow T(X^\cdot) \xrightarrow{-T(f)} T(Y^\cdot)$$

est distingué.

- (TR4) Si  $X_1 \rightarrow Y_1 \rightarrow Z_1 \rightarrow T(X_1)$  et  $X_2 \rightarrow Y_2 \rightarrow Z_2 \rightarrow T(X_2)$  sont des triangles distingués et  $u : X_1 \rightarrow X_2$  et  $v : Y_1 \rightarrow Y_2$  sont des morphismes de  $K(A)$  tels que le premier carré de

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_1 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & T(X_1) \\
 \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow T(f) \\
 X_2 & \longrightarrow & Y_2 & \longrightarrow & Z_2 & \longrightarrow & T(X_2)
 \end{array}$$



commute, alors il existe  $w : Z_1 \longrightarrow Z_2$  dans  $K(A)$  tel que  $(u,v,w)$  est un morphisme de triangle.

$$(TR5) \text{ Si } \begin{cases} X_1 \xrightarrow{f} Y_1 \longrightarrow Z_2 \longrightarrow T(X_1) \\ Y_1 \xrightarrow{g} Z_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow T(Y_1) \\ X_1 \xrightarrow{g \circ f} Z_1 \longrightarrow Y_2 \longrightarrow T(X_1) \end{cases} \text{ sont des triangles distingués,}$$

alors il existe un triangle distingué  $Z_2 \longrightarrow Y_2 \longrightarrow X_2 \longrightarrow T(Z_2)$  et des morphismes de triangles tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \xrightarrow{f} & Y_1 & \longrightarrow & Z_2 & \longrightarrow & T(X_1) \\ \parallel \text{Id} & & \downarrow g & & \downarrow & & \parallel \text{Id}_{T(X_1)} \\ X_1 & \xrightarrow{g \circ f} & Z_1 & \longrightarrow & Y_2 & \longrightarrow & T(X_1) \\ \downarrow f & & \parallel \text{Id} & & \downarrow & & \downarrow T(f) \\ Y_1 & \xrightarrow{g} & Z_1 & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & T(Y_1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \text{Id} & & \downarrow \\ Z_2 & \dashrightarrow & Y_2 & \dashrightarrow & X_2 & \longrightarrow & T(Z_2) \end{array}$$

Nous pouvons déduire de ces propriétés le lemme suivant qui sera utilisé dans les chapitres subséquents.

**Lemme 3.** Dans TR4, si  $u$  et  $v$  sont des quasi-isomorphismes, alors  $w$  en est un aussi.

*Démonstration.* du lemme. Supposons que dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & T(X_1) \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow T(f) \\ X_2 & \longrightarrow & Y_2 & \longrightarrow & Z_2 & \longrightarrow & T(X_2) \end{array} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$u$  et  $v$  sont des quasi-isomorphismes. Par TR0, les triangles (1) et (2) sont isomorphes à des triangles de la forme

$$\begin{array}{ccccccc} U_1 & \xrightarrow{f_1} & V_1 & \xrightarrow{q_{V_1}} & C_{f_1} & \xrightarrow{p_{U_1}} & T(U_1) \\ U_2 & \xrightarrow{f_2} & V_2 & \xrightarrow{q_{V_2}} & C_{f_2} & \xrightarrow{p_{U_1}} & T(U_2) \end{array}$$

On a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 U_1 & \xrightarrow{f_1} & V_1 & \xrightarrow{qv_1} & C_{f_1} & \xrightarrow{pu_1} & T(U_1) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X_1 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & T(X_1) \\
 \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow T(f) \\
 X_2 & \longrightarrow & Y_2 & \longrightarrow & Z_2 & \longrightarrow & T(X_2) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 U_2 & \xrightarrow{f_2} & V_2 & \xrightarrow{qv_2} & C_{f_2} & \xrightarrow{pu_2} & T(U_2)
 \end{array}
 \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

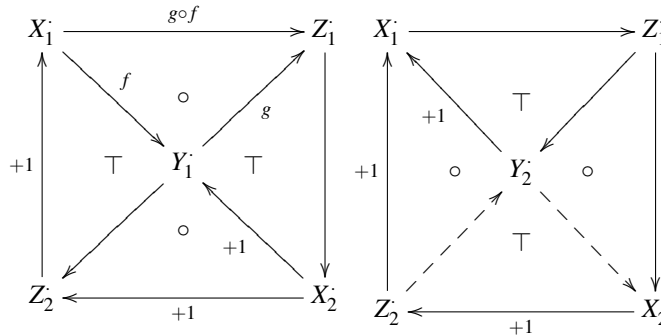
Nous obtenons ainsi un morphisme de triangle  $(u', v', w')$  entre la première et la dernière ligne du diagramme. On voit facilement que  $u'$  et  $v'$  sont des quasi-isomorphismes puisqu'ils sont la composé de quasi-isomorphismes.

On a donc les deux longues suites exactes suivantes, avec entre elles les morphismes induits de  $(u', v', w')$  :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \dots & \rightarrow & H^k(U_1) & \rightarrow & H^k(V_1) & \rightarrow & H^k(C_{f_1}) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(U_1) & \rightarrow & H^{k+1}(V_1) & \rightarrow & \dots \\
 & & \downarrow H^k(u') & & \downarrow H^k(v') & & \downarrow H^k(w') & & \downarrow H^{k+1}(u') & & \downarrow H^{k+1}(v') & & \\
 \dots & \rightarrow & H^k(U_2) & \rightarrow & H^k(V_2) & \rightarrow & H^k(C_{f_2}) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(U_2) & \rightarrow & H^{k+1}(V_2) & \rightarrow & \dots
 \end{array}$$

Comme  $H^k(u')$  et  $H^k(v')$  sont des isomorphismes, alors  $H^k(w')$  est aussi un isomorphisme par le lemme des cinq, et  $w'$  est un quasi-isomorphisme ce qui implique que  $w$  est aussi un quasi-isomorphisme.  $\square$

La propriété la plus difficile à saisir est assurément TR5 et elle mérite plus d'explications. TR5 est appelée «axiome de l'octaèdre» dans plusieurs textes pour la raison suivante : il est possible de redessiner le diagramme associé de manière à mieux montrer sa structure en considérant l'octaèdre :



où le premier diagramme représente la partie supérieure de l'octaèdre et le deuxième sa partie inférieure, le symbole  $\circ$  indique qu'un triangle du diagramme commute, le symbole  $\top$  indique qu'un triangle du diagramme est un triangle distingué de la catégorie  $K(A)$  et enfin où  $+1$  indique un morphisme de degré 1.

Pour démontrer les propriétés TR0 - TR5, nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 4.** *Dans  $K(A)$ , pour tout objet  $X$ ,  $C_{Id_X}$  est isomorphe au complexe 0.*

*Démonstration.* du lemme. On doit montrer que le diagramme suivant commute à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{0} & C_{Id_X} \\ \parallel & & \parallel \\ 0 & & Id_{C_{Id_X}} \\ \parallel & & \parallel \\ 0 & \xleftarrow{0} & C_{Id_X} \end{array}$$

Il suffit montrer que  $Id_X$  est homotope à  $0 : C_{Id_X} \rightarrow C_{Id_X}$ . Soit  $h : T(C_{Id_X}) \rightarrow C_{Id_X}$  le morphisme de degré  $-1$  défini par  $h^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & Id_Y^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Il faut montrer que dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_{Id_X}^{k-1} & \xrightarrow{d^{k-1}} & C_{Id_X}^k & \xrightarrow{d^k} & C_{Id_X}^{k+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \parallel & \swarrow h^k & \parallel & \swarrow h^{k+1} & \parallel & & \\ \dots & \longrightarrow & C_{Id_X}^{k-1} & \xrightarrow{d^{k-1}} & C_{Id_X}^k & \xrightarrow{d^k} & C_{Id_X}^{k+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

on a que  $h^{k+1}d^k + d^{k-1}h^k = 0 - Id_{C_{Id_X}} = -Id_{C_{Id_X}}$ . Mais on a que

$$\begin{aligned} h^{k+1}d^k + d^{k-1}h^k &= \begin{pmatrix} 0 & Id_Y^{k+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_X^{k+1} & 0 \\ -Id_X^{k+1} & d_X^k \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} -d_X^k & 0 \\ -Id_X^k & d_X^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Id_Y^{k+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -Id_X^{k+1} & d_X^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d_X^k \\ 0 & -Id_X^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -Id_X^{k+1} & 0 \\ 0 & -Id_X^k \end{pmatrix} \\ &= -Id_{C_{Id_X}} \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

Nous pouvons maintenant donner la démonstration du théorème 8 :

*Démonstration.*

(TR0) Vrai par définition.

(TR1) Il faut vérifier que

$$X^\cdot \xrightarrow{Id_X} X^\cdot \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} T(X^\cdot)$$

est isomorphe à un triangle standard. Il suffit de montrer que le diagramme suivant est commutatif et est un isomorphisme de triangle :

$$\begin{array}{ccccccc} X^\cdot & \xrightarrow{Id_X} & X^\cdot & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & T(X^\cdot) \\ \downarrow Id_X & & \downarrow Id_X & & \downarrow 0 & & \downarrow T(Id_X) \\ X^\cdot & \xrightarrow{Id_X} & X^\cdot & \xrightarrow{q_X} & C_{Id_X} & \xrightarrow{p_X} & T(X^\cdot) \end{array}$$

En effet, le premier carré est trivialement commutatif, le deuxième commute puisque  $q_X \circ Id_X = 0 \circ 0 = 0$  car la composition de deux morphismes successifs dans un triangle standard est le morphisme nul, et le dernier commute car les deux compositions de morphismes donnent 0. Comme par le lemme précédent  $0 : 0 \rightarrow C_{Id_X}$  est isomorphisme dans  $K(A)$ , on a le résultat voulu.

(TR2) Pour la classe d'homotopie d'un morphisme  $f$  de  $C(A)$  donné, il suffit de prendre le triangle

$$X^\cdot \xrightarrow{f} Y^\cdot \longrightarrow C_f \longrightarrow T(X^\cdot)$$

(TR3) ( $\Rightarrow$ ) Soit  $X^\cdot \xrightarrow{f} Y^\cdot \xrightarrow{g} Z^\cdot \xrightarrow{h} T(X^\cdot)$  un triangle distingué de  $K(A)$ . Supposons qu'il est isomorphe au triangle  $U^\cdot \xrightarrow{u} V^\cdot \xrightarrow{p_U} C_u \xrightarrow{q_U} T(U^\cdot)$ . Considérons le diagramme suivant de  $C(A)$  ( $\longleftrightarrow$  désigne un isomorphisme et nous définissons les morphismes  $a$  et  $b$  plus loin) :

$$\begin{array}{ccccccc} X^\cdot & \xrightarrow{f} & Y^\cdot & \xrightarrow{g} & Z^\cdot & \xrightarrow{h} & T(X^\cdot) \xrightarrow{-T(f)} T(Y^\cdot) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ U^\cdot & \xrightarrow{u} & V^\cdot & \xrightarrow{q_V} & C_u & \xrightarrow{p_U} & T(U^\cdot) \xrightarrow{-T(u)} T(V^\cdot) \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & V & \xrightarrow{q_V} & C_u & \xrightarrow{q_{C_u}} & C_{q_V} \xrightarrow{p_V} T(V^\cdot) \end{array} \quad (1)$$

$\begin{array}{c} \wedge | \\ b | | a \\ \vee | \end{array}$

Si on montre que la dernière ligne du diagramme est isomorphe à homotopie près au triangle  $V^\cdot \xrightarrow{q_V} C_u \xrightarrow{p_U} T(U^\cdot) \xrightarrow{-T(u)} T(V^\cdot)$ , alors par la commutativité des carrés des deux premières lignes du diagramme on aura que

$$Y^\cdot \xrightarrow{g} Z^\cdot \xrightarrow{h} T(X^\cdot) \xrightarrow{-T(f)} T(Y^\cdot)$$

est isomorphe à un triangle standard et donc qu'il est distingué par définition. Pour ce faire, il sera suffisant de montrer qu'il y a un isomorphisme  $a$  dans  $K(A)$  par la commutativité du premier carré de la dernière ligne et parce que  $Id_V$  et  $Id_{C_u}$  sont des isomorphismes.

On note que  $C_{qV}^k = V^{k+1} \oplus C_u^k = V^{k+1} \oplus U^{k+1} \oplus V^k$  et que

$$\begin{aligned} d_{C_{qV}}^k &= \left( \begin{array}{c|c} -d_V^{k+1} & 0 \\ \hline -d_V^k & d_{C_u}^{(k)} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|cc} -d_V^{k+1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -d_U^{k+1} & 0 \\ -Id_{V^k} & -u^{k+1} & d_V^k \end{array} \right) \end{aligned}$$

Soit les morphismes de  $C(A)$   $a : T(U^\cdot) \longrightarrow C_{qV}$  défini par  $a^k = \begin{pmatrix} -u^{k+1} \\ Id_U^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix}$

et  $b : C_{qV} \longrightarrow T(X^\cdot)$  défini par  $b^k = \begin{pmatrix} 0 & Id_U^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$ . On montrera que les carrés du bas du diagramme (1) commutent après avoir prouvé que  $a$  est un isomorphisme.

Comme il est immédiat que  $ba = Id_{T(X)}$ , pour montrer que  $a$  est un isomorphisme dans  $K(A)$ , il suffit de montrer que  $ab$  est homotope à  $Id_{C_{qV}}$ . On prend comme homotopie le morphisme  $m : C_{qV} \longrightarrow C_{qV}$  de degré  $-1$  défini par  $m^k =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & Id_{V^k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ On a donc la situation suivante :}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_{qV}^{k-1} & \xrightarrow{d_{C_{qV}}^{k-1}} & C_{qV}^k & \xrightarrow{d_{C_{qV}}^k} & C_{qV}^{k+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow b^{k-1} & & \downarrow b^k & & \downarrow b^{k+1} & & \\ & & U^{(k)} & \xrightarrow{m^k} & U^{(k+1)} & \xrightarrow{m^{k+1}} & U^{(k+2)} & & \\ & & \downarrow a^{k-1} & & \downarrow a^k & & \downarrow a^{k+1} & & \\ \dots & \longrightarrow & C_{qV}^{k-1} & \xrightarrow{d_{C_{qV}}^{k-1}} & C_{qV}^k & \xrightarrow{d_{C_{qV}}^k} & C_{qV}^{k+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

On vérifie que  $d_{C_{qV}}^{k-1} m^k + m^{k+1} d_{C_{qV}}^k = a^k b^k - Id_{C_{qV}}^k$ . Remarquons que  $a^k b^k =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -u^{k+1} & 0 \\ 0 & Id_{U^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et donc que } a^k b^k - Id_{C_{qV}}^k = \begin{pmatrix} -Id_{V^{k+1}} & -u^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Id_{V^k} \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
d_{C_{q_V}}^{k-1} m^k + m^{k+1} d_{C_{q_V}}^k &= \begin{pmatrix} -d_V^k & 0 & 0 \\ 0 & -d_U^k & 0 \\ -Id_{V^k} & -u^k & d_V^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & Id_{V^k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & Id_{V^{k+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_V^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_X^{k+1} & 0 \\ -Id_{V^{k+1}} & -u^{k+1} & d_V^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -d_V^k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Id_{V^k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Id_{V^{k+1}} & -u^{k+1} & d_V^k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -Id_{V^{k+1}} & -u^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Id_{V^k} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi  $a$  est un isomorphisme. On montre que les carrés du bas de (1) sont commutatifs. Celui de gauche est trivialement commutatif, celui de droite commute par définition de  $a$  : d'une part  $-T(u^k) = -u^{k+1}$  et d'autre part

$$p_V^k a^k = \begin{pmatrix} Id_{V^{k+1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u^{k+1} \\ Id_U^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} = -u^{k+1}$$

Il reste à montrer que  $ap_U = qc_u$  à homotopie près. On prend comme homotopie le morphisme  $m : C_u \rightarrow C_{q_V}$  de degré  $-1$  défini par  $m^k = \begin{pmatrix} 0 & Id_{V^k} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On a que

$$\begin{aligned}
d_{C_{p_V}}^{k-1} m^k + m^{k+1} d_{C_u}^k &= \begin{pmatrix} -d_V^k & 0 & 0 \\ 0 & -d_U^k & 0 \\ -Id_{V^k} & -u^k & -d_{V^{k-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Id_{V^k} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & Id_{V^{k+1}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_U^{k+1} & 0 \\ -u^{k+1} & d_V^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -d_V^k \\ 0 & 0 \\ 0 & -Id_{V^k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u^{k+1} & d_V^k \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -u^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -Id_{V^k} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et aussi que

$$ap_U - qc_u = \begin{pmatrix} -u^{k+1} & 0 \\ Id_{U^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Id_{U^{k+1}} & 0 \\ 0 & Id_{V^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -Id_{V^k} \end{pmatrix}$$

et donc  $m$  est bien l'homotopie voulue.

( $\Leftarrow$ ) La preuve est similaire à celle de  $\Rightarrow$ , à ceci près qu'il faut utiliser le fait que  $T^{-1}(C_f) = C_{T^{-1}(f)}$ .

(TR4) Comme par définition tout triangle distingué est isomorphe à un triangle standard, il suffit de faire la démonstration pour les triangles standard. Soit  $f, g, u, v$  des morphismes de  $C(A)$  tels que le premier carré du diagramme de  $C(A)$  suivant soit commutatif à homotopie près :

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \xrightarrow{f} & Y_1 & \xrightarrow{q_1} & C_f & \xrightarrow{p_1} & T(X_1) \\ u \downarrow & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow T(u) \\ X_2 & \xrightarrow{g} & Y_2 & \xrightarrow{q_2} & C_g & \xrightarrow{p_2} & T(X_2) \end{array}$$

Soit  $h : X \rightarrow Y$  le morphisme de degré -1 qui est l'homotopie entre  $vf$  et  $gu$ .

On définit  $w$  par  $w^k = \begin{pmatrix} -u^{k+1} & 0 \\ h^{k+1} & v^k \end{pmatrix}$ . Les deux derniers carrés du diagramme sont alors commutatifs puisque

$$\begin{aligned} w^k q_1^k &= \begin{pmatrix} -u^{k+1} & 0 \\ h^{k+1} & v^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ Id_{Y_1^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ Id_{Y_2^k} \end{pmatrix} \circ v^k \\ &= q_2^k v^k \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} T(u^k) p_1^k &= -u^{k+1} \circ \begin{pmatrix} Id_{T(X_1)}^{k+1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -u^{k+1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Id_{T(X_2)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u^{k+1} & 0 \\ h^{k+1} & v^k \end{pmatrix} \\ &= p_2^k w \end{aligned}$$

(TR5) Comme pour TR4, on peut faire la preuve dans le cas où les triangles sont des triangles standards, puisqu'on aura alors l'existence des morphismes voulu dans le cas général.

Soit  $f, g, w$  trois morphismes de  $C(A)$  tels que les carrés de gauche du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X \cdot & \xrightarrow{f} & Y \cdot & \xrightarrow{q_f} & C_f & \xrightarrow{p_f} & T(X \cdot) \\ Id_X \parallel & & \downarrow g & & \downarrow s & & \downarrow T(Id) \\ X \cdot & \xrightarrow{w} & Z \cdot & \xrightarrow{q_w} & C_w & \xrightarrow{p_w} & T(X \cdot) \\ f \downarrow & & \parallel Id & & \downarrow t & & \downarrow T(f) \\ Y \cdot & \xrightarrow{g} & Z \cdot & \xrightarrow{q_g} & C_g & \xrightarrow{p_g} & T(Y \cdot) \end{array}$$

commutent à homotopie près. Soit  $h : X \rightarrow Z$  l'homotopie entre  $gf$  et  $w$ . On définit  $s$  et  $t$  par  $s^k = \begin{pmatrix} Id_{X^{k+1}} & 0 \\ h^{k+1} & g^k \end{pmatrix}$  et  $t^k = \begin{pmatrix} f^{k+1} & 0 \\ -h^{k+1} & Id_{Z^k} \end{pmatrix}$ . On peut vérifier directement que les autres carrés du diagramme sont commutatifs en multipliant les matrices des morphismes impliquées.

On a ainsi le diagramme commutatif de  $K(A)$  suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{q_f} & C_f & \xrightarrow{p_f} & T(X) \\
\parallel^{Id_X} & & \downarrow g & & \downarrow s & & \downarrow T(Id) \\
X & \xrightarrow{gf} & Z & \xrightarrow{q_w} & C_w & \xrightarrow{p_w} & T(X) \\
\downarrow f & & \parallel^{Id} & & \downarrow t & & \downarrow T(f) \\
Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{q_g} & C_g & \xrightarrow{p_g} & T(Y_1) \\
\downarrow q_f & & \downarrow q_w & & \parallel^{Id} & & \downarrow T(q_f) \\
C_f & \xrightarrow{s} & C_w & \xrightarrow{t} & C_g & \xrightarrow{T(q_f)p_g} & T(C_f)
\end{array}$$

Il reste à montrer que la dernière ligne est isomorphe à un triangle standard. On a la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
C_f & \xrightarrow{s} & C_w & \xrightarrow{t} & C_g & \xrightarrow{T(q_f)p_g} & T(C_f) \\
\parallel & & \parallel & & \begin{array}{c} \uparrow b \\ \downarrow a \end{array} & & \parallel \\
C_f & \xrightarrow{s} & C_w & \xrightarrow{q_s} & C_s & \xrightarrow{p_s} & T(C_f)
\end{array}$$

Notons que  $C_s^k = C_f^{k+1} \oplus C_w^k = X^{k+2} \oplus Y^{k+1} \oplus X^{k+1} \oplus Z^k$  et que

$$\begin{aligned}
d_{C_s}^k &= \left( \begin{array}{ccc|cc} -d_{C_f}^{k+1} & & 0 & & \\ \hline -s^{k+1} & & d_{C_w}^k & & \end{array} \right) \\
&= \left( \begin{array}{cc|cc} d_X^{k+2} & 0 & 0 & 0 \\ f^{k+2} & -d_Y^{k+1} & 0 & 0 \\ \hline -Id_{X^{k+2}} & 0 & -d_X^{k+1} & 0 \\ -h^{k+2} & -g^{k+1} & -w^{k+1} & d_Z^k \end{array} \right)
\end{aligned}$$

On définit  $a$  par  $a^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Id_{Y^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Id_{Z^k} \end{pmatrix}$ . On a alors que les deux derniers carrés du diagramme précédent sont commutatifs. Le dernier commute puisque

$$p_s^k a^k = \begin{pmatrix} Id_{X^{k+2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Id_{Y^{k+1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Id_{Y^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Id_{Z^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Id_{Y^{k+1}} & 0 \end{pmatrix}$$



et que  $T(q_f)p_g = \begin{pmatrix} 0 & \\ & Id_{Y^{k+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id_{Y^{k+1}} & 0 \\ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & Id_{Y^{k+1}} \end{pmatrix}$  Le carré du centre commute à homotopie près : l'homotopie entre  $q_s$  et  $at$  est le morphisme  $m : C_w \rightarrow C_s$  de degré +1 défini par  $m^k = \begin{pmatrix} Id_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . En effet, on a que :

$$\begin{aligned} d_{C_s}^{k+1} m^k + m^{k+1} d_{C_w}^k &= \begin{pmatrix} d_X^{k+1} & 0 & 0 & 0 \\ f^{k+1} & -d_Y^k & 0 & 0 \\ -Id_{X^{k+1}} & 0 & -d_X^k & 0 \\ -h^{k+1} & -g^{k+1} & -w^k & d_Z^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} Id_{X^{k+2}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_X^{k+1} & 0 \\ -w^{k+1} & -d_Z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_X^{k+1} & 0 \\ f^{k+1} & 0 \\ -Id_{X^{k+1}} & 0 \\ -h^{k+1} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d_X^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -f^{k+1} & 0 \\ -Id_{X^{k+1}} & 0 \\ -h^{k+1} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mais aussi que

$$a^k t^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Id_{Y^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Id_{Z^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{k+1} & 0 \\ -h^{k+1} & Id_{Z^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 \\ -h^{k+1} & Id_{Z^k} \end{pmatrix}$$

et donc, comme  $q_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Id_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & Id_{Z^k} \end{pmatrix}$ , on a que  $at - q_s = d_{C_s}^{k+1} m^k + m^{k+1} d_{C_w}^k$ .

Il reste à montrer que  $a$  est un isomorphisme. Soit  $b : C_s \rightarrow C_g$  défini par  $b^k = \begin{pmatrix} 0 & Id_{Y^{k+1}} & u^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & -h^{k+1} & Id_{Z^k} \end{pmatrix}$ . On a que

$$\begin{aligned} b^k a^k &= \begin{pmatrix} 0 & Id_{Y^{k+1}} & u^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & -h^{k+1} & Id_{Z^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Id_{Y^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Id_{Z^k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Id_{Y^{k+1}} & 0 \\ 0 & Id_{Z^k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il reste donc à montrer que  $ab = Id_{C_s}$  à homotopie près. L'homotopie  $r$  entre  $ab$

et  $Id_{C_s}$  est donnée par  $r^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Id_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On montre que  $r$  est bien

l'homotopie voulue : on a que

$$\begin{aligned} a^k b^k &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Id_{Y^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Id_{Z^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Id_{Y^{k+1}} & u^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & -h^{k+1} & Id_{Z^k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Id_{Y^{k+1}} & u^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h^{k+1} & Id_{Z^k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et aussi que

$$\begin{aligned} d_{C_s}^{k-1} r^k + r^{k+1} d_{C_s}^k &= \begin{pmatrix} d_X^{k+1} & 0 & 0 & 0 \\ f^{k+1} & -d_Y^k & 0 & 0 \\ -Id_{X^{k+1}} & 0 & -d_X^k & 0 \\ -h^{k+1} & -g^k & -f^k & d_Y^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & Id_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & Id_{X^{k+2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_X^{k+2} & 0 & 0 & 0 \\ f^{k+2} & -d_Y^{k+1} & 0 & 0 \\ -Id_{X^{k+2}} & 0 & -d_X^{k+1} & 0 \\ -h^{k+2} & -g^{k+1} & -f^{k+1} & d_Y^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_X^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & f^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & -Id_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 & -h^{k+1} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Id_{X^{k+2}} & 0 & -d_X^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -Id_{X^{k+2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & -Id_{X^{k+1}} & 0 \\ 0 & 0 & -h^{k+1} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui est bien égal à  $ab - Id_{C_s}$ . □

On remarque que dans les catégories  $K^+(A)$ ,  $K^-(A)$  et  $K^b(A)$ , TR0-TR5 restent vrais car la preuve donnée y est valable puisque le cône d'un morphisme de  $C^+(A)$ ,  $C^-(A)$  et  $C^b(A)$  est lui aussi dans cette catégorie.

# Chapitre 3

## Catégories triangulées

### 3.1 Définitions et propriétés des catégories triangulées

Nous examinerons maintenant une structure qui généralise les propriétés des triangles dans les catégories de complexes.

Soit  $A$  une catégorie additive et  $T : A \rightarrow A$  un automorphisme additif de catégorie. Un *triangle* de  $A$  est une suite de morphismes de  $A$  ayant la forme :

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow T(X)$$

On définit les morphismes et les isomorphismes de triangles de la même manière que dans le cas d'une catégorie de complexe.

**Définition 3.** (1) Soit  $R$  une famille de triangles de  $A$ , que l'on appellera triangles distingués.  $A$  est triangulée par  $R$  si  $R$  satisfait les propriétés TR0 - TR5 de la section précédente.

(2) Soit  $B$  une catégorie additive avec  $T' : B \rightarrow B$  un automorphisme de catégorie. Un foncteur additif  $F : A \rightarrow B$  est un foncteur gradué si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F} & B \\ T \downarrow & & \downarrow T' \\ A & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

(3) Soit  $B$  une catégorie triangulée. Un foncteur additif  $F : A \rightarrow B$  est un foncteur de catégorie triangulée si  $F$  est gradué et envoie les triangles distingués de  $A$  sur des triangles distingués de  $B$ .

(4) Soit  $B$  une catégorie abélienne. Un foncteur  $F : A \rightarrow B$  est un foncteur cohomologique si pour tout triangle distingué de  $A$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$$

la longue suite suivante est exacte :

$$\cdots \longrightarrow F^n(X) \xrightarrow{F^n(f)} F^n(Y) \xrightarrow{F^n(g)} F^n(Z) \xrightarrow{F^n(h)} F^{n+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

où  $F^n(X) = F(T^n(X))$ . S'il associe plutôt à un triangle distingué une longue suite duale à celle du dernier diagramme, on dira qu'il est homologique.

La catégorie  $K(A)$  est triangulée puisqu'on a démontré dans le chapitre précédent qu'elle satisfait à TR0 - TR5. Les catégories  $K^+(A)$ ,  $K^-(A)$  et  $K^b(A)$  sont aussi triangulées. Un autre exemple est donné par la catégorie stable d'homotopie discutée dans [Weibel, p. 407]. Comme les triangles distingués sont l'analogue des suites exactes, on remarque que les foncteurs de catégories triangulées, qui préservent les triangles distingués, sont l'analogue des foncteurs exacts - qui préservent les courtes suites exactes - entre catégories abéliennes. Pour cette raison, certains auteurs appellent les foncteurs de catégories triangulées des "foncteurs exacts".

Le premier lemme que nous donnons montre qu'à partir des axiomes de catégorie triangulée on peut obtenir des résultats analogues à ceux obtenus dans  $K(A)$  dans le chapitre précédent.

**Lemme 5.** *si le triangle suivant*

$$X' \longrightarrow Y' \longrightarrow Z' \longrightarrow T(X')$$

*est distingué, alors  $vu = 0$ .*

*Démonstration.* Nous avons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{Id} & YX & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & T(X) \\ \parallel^{Id} & & \downarrow u & & \downarrow s & & \downarrow Id_{T(X)} \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & T(X') \end{array}$$

où le premier carré commute et la première ligne est un triangle distingué par TR1. On peut alors utiliser TR4 pour avoir un morphisme  $s$  comme indiqué, faisant commuter tout le diagramme. On a alors que  $vu = s0 = 0$ , ce qui est le résultat voulu.  $\square$

Le lemme suivant est l'analogue du théorème des longues suites exactes de cohomologie pour les triangles. Il nous indique que nous avons défini une structure qui a des propriétés similaires aux courtes suites exactes.

**Lemme 6.** *le foncteur  $H^n : K(A) \longrightarrow A$  est cohomologique.*

*Démonstration.* Soit

$$X' \longrightarrow Y' \longrightarrow Z' \longrightarrow T(X')$$

un triangle distingué isomorphe au triangle

$$U \xrightarrow{f} V \longrightarrow C_f \longrightarrow T(U)$$

En appliquant le foncteur  $H$ , on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{cccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H^k(X^\cdot) & \longrightarrow & H^k(Y^\cdot) & \longrightarrow & H^k(Z) & \longrightarrow & H^{k+1}(X^\cdot) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow H^k(u) & & \downarrow H^k(v) & & \downarrow H^k(w) & & \downarrow H^{k+1}(u) & & \\
 \cdots & \longrightarrow & H^k(U^\cdot) & \longrightarrow & H^k(V^\cdot) & \longrightarrow & H^k(C_f) & \longrightarrow & H^{k+1}(U^\cdot) & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Comme les flèches verticales sont des isomorphismes et que la longue suite du bas est exacte, celle du haut l'est aussi.  $\square$

Voici un exemple similaire qui sera utile dans les applications :

**Lemme 7.** Pour  $M \in \text{Ob}(A)$  ( $A$  additive et triangulée) le foncteur  $\text{Hom}_A(M, -)$  est cohomologique et le foncteur  $\text{Hom}_A(-, M)$  est homologique.

*Démonstration.* Montrons que  $\text{Hom}_A(M, -)$  est cohomologique. Le fait que  $\text{Hom}_A(-, M)$  est homologique se prouvera en faisant l'argument dual. En effet, soit le triangle distingué

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow T(X)$$

Par TR2, il suffit de montrer que

$$\text{Hom}(M, X) \xrightarrow{u_*} \text{Hom}(M, Y) \xrightarrow{v_*} \text{Hom}(M, Z)$$

est exacte, c'est-à-dire que  $\text{Im}(u_*) = \text{Ker}(v_*)$ .

( $\subseteq$ ) Comme  $v \circ u = 0$  par le lemme précédent,  $v_* \circ u_* = 0$  et donc  $\text{Im}(u_*) \subseteq \text{Ker}(v_*)$ .

( $\supseteq$ ) Soit  $f \in \text{Ker}(v_*)$ , c'est-à-dire tel que  $v \circ f = 0$ . On veut trouver  $g \in \text{Hom}(M, X)$  tel que  $u_*(g) = u \circ g = f$ . Par TR1, TR3 et TR4, il existe un morphisme  $g$  tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 M & \xrightarrow{Id_M} & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & T(M) \\
 \downarrow g & & \downarrow f & & \downarrow 0 & & \downarrow T(g) \\
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \longrightarrow & T(X)
 \end{array}$$

et  $g$  est le morphisme désiré.  $\square$

**Corolaire 5.** Si  $A$  est une catégorie additive et triangulée, alors dans TR4, si  $u$  et  $v$  sont des isomorphismes, alors  $w$  en est un aussi.

*Démonstration.* Si les deux lignes du diagramme suivant sont des triangles distingués et si on a  $u$  et  $v$  deux isomorphismes tels que le premier carré commute, alors par TR4 il existe  $w$  tel faisant commuter

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_1 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & T(X_1) \\
 \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow T(u) \\
 X_2 & \longrightarrow & Y_2 & \longrightarrow & Z_2 & \longrightarrow & T(X_2)
 \end{array}$$

Par le lemme précédent, nous obtenons en appliquant  $\text{Hom}(Z_2, -)$  les longues suites exactes et le diagramme commutatif suivant dans la catégorie abélienne des  $\mathbb{Z}$ -modules :

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \text{Hom}(Z_2, X_1) & \longrightarrow & \text{Hom}(Z_2, Y_1) & \longrightarrow & \text{Hom}(Z_2, Z_1) & \longrightarrow & \text{Hom}(Z_2, T(X_1)) & \longrightarrow & \text{Hom}(Z_2, T(Y_1)) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow u_* & & \downarrow v_* & & \downarrow w_* & & \downarrow T(u)_* & & \downarrow T(v)_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & \text{Hom}(Z_2, X_2) & \longrightarrow & \text{Hom}(Z_2, Y_2) & \longrightarrow & \text{Hom}(Z_2, Z_2) & \longrightarrow & \text{Hom}(Z_2, T(X_2)) & \longrightarrow & \text{Hom}(Z_2, T(Y_2)) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Comme  $u$  et  $v$  sont des isomorphismes, alors  $u_*$  et  $v_*$  sont aussi des isomorphismes puisque  $\text{Hom}$  est un foncteur. Par le lemme des cinq,  $w_*$  est donc aussi un isomorphisme.

De façon similaire en appliquant  $\text{Hom}(-, Z_1)$  on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \text{Hom}(T(Y_1), Z_1) & \longrightarrow & \text{Hom}(T(X_1), Z_1) & \longrightarrow & \text{Hom}(Z_1, Z_1) & \longrightarrow & \text{Hom}(Y_1, Z_1) & \longrightarrow & \text{Hom}(X_1, Z_1) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow T(v)^* & & \downarrow T(u)^* & & \downarrow w^* & & \downarrow v^* & & \downarrow u^* & & \\ \cdots & \longrightarrow & \text{Hom}(T(Y_2), Z_1) & \longrightarrow & \text{Hom}(T(X_2), Z_1) & \longrightarrow & \text{Hom}(Z_2, Z_1) & \longrightarrow & \text{Hom}(Y_2, Z_1) & \longrightarrow & \text{Hom}(X_2, Z_1) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

et le fait que  $w^*$  est un isomorphisme.

Il existe donc  $f \in \text{Hom}(Z_2, Z_1)$  tel que  $w_*(f) = w \circ f = \text{Id}_{Z_2}$  et  $g \in \text{Hom}(Z_2, Z_1)$  tel que  $w^*(g) = g \circ w = \text{Id}_{Z_1}$ , c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & \xleftarrow{f} & Z_2 \\ \text{Id}_{Z_1} \downarrow & \searrow w & \downarrow \text{Id}_{Z_2} \\ Z_1 & \xleftarrow{g} & Z_2 \end{array}$$

On voit ainsi que  $f = g$ , ce qui implique que  $w$  est un isomorphisme.  $\square$

Il reste à examiner une dernière définition importante avant de pouvoir énoncer le résultat central de la théorie des catégories triangulées : il faut pouvoir relier la localisation par rapport à un système multiplicatif et la structure triangulée.

**Définition 4.** Soit  $A$  une catégorie additive et triangulée. On dit qu'un système multiplicatif  $\Sigma \subset \text{Fl}(A)$  est compatible avec la structure triangulée de  $A$  si

$$(SM4) \quad f \in \Sigma \Leftrightarrow T(f) \in \Sigma$$

(SM5) Dans  $TR4$ , si  $u$  et  $v$  sont dans  $\Sigma$ , alors on peut prendre un  $w$  qui l'est aussi.

Ces deux propriétés sont évidemment vraies dans le cas d'une catégorie de complexes modulo homotopie : la première dit alors simplement que le translaté par  $T$  ou  $T^{-1}$  (le foncteur de translation défini au début du chapitre précédent) d'un quasi-isomorphisme en est un aussi et la seconde est le lemme 3. Les catégories  $K^+(A), K^-(A)$  et  $K^b(A)$  sont aussi triangulées.

**Théorème 9.** Si  $A$  est une catégorie additive et triangulée par la famille de triangles distingués  $\Phi$  et si  $\Sigma$  est un système multiplicatif compatible avec la structure triangulée de  $A$ , alors  $A_\Sigma$  est triangulée et  $Q_\Sigma : A \rightarrow A_\Sigma$  est un foncteur de catégories triangulées.

*Démonstration.* Pour définir une structure triangulée sur  $A_\Sigma$  il faut premièrement trouver une auto-équivalence de catégorie sur  $A_\Sigma$ . Nous utiliserons à cette fin la propriété universelle de  $Q_\Sigma$  : on prend comme foncteur de gradation  $T_\Sigma$  sur  $A_\Sigma$  l'unique foncteur  $T_\Sigma$  tel que

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{T} & A \\ Q_\Sigma \downarrow & & \downarrow Q_\Sigma \\ A_\Sigma & \xrightarrow{T_\Sigma} & A_\Sigma \end{array}$$

commute. Il faut ensuite prendre une famille de triangles distingués. On prend la famille  $\Psi = \{\text{triangles de } A_\Sigma \text{ isomorphes à l'image d'un triangle distingué de } A \text{ par } Q_\Sigma\}$ . Il est clair que si  $A_\Sigma$  est triangulée, alors par définition  $Q_\Sigma$  sera un foncteur de catégorie triangulée. Il reste donc à vérifier que les axiomes TR0 - TR5 sont vrais dans  $A_\Sigma$ .

(TR0) Par définition de  $\Psi$  tout triangle de  $A_\Sigma$  isomorphe à un triangle de  $\Psi$  est un triangle de  $\Psi$ .

(TR1)

$$X \xrightarrow{\overline{Id}_X} X \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} T(X)$$

est dans  $\Psi$  pour tout  $X \in \text{Ob}(A_\Sigma)$  car il est l'image par  $P_\Sigma$  du triangle distingué de  $A$

$$X \xrightarrow{Id_X} X \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} T(X)$$

(TR2) Soit  $\alpha \in \text{Hom}_{A_\Sigma}(X, Y)$ ,  $\alpha = \overline{fg}$ . Il faut trouver un triangle dans  $\psi$  dont le premier morphisme est  $\alpha$ . Comme  $A$  est triangulée, on peut dans  $A$  trouver un triangle distingué

$$U \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{a} Z \xrightarrow{b} T(U)$$

On peut donc construire le diagramme commutatif suivant dans  $A$  :

$$\begin{array}{ccccccc} & & U & & & & \\ & \swarrow g & & \searrow f & & & \\ X & & & & Y & \xrightarrow{a} & Z & \xrightarrow{T(g) \circ b} & T(X) \\ \uparrow g & & & & \parallel & & \parallel & & \uparrow T(g) \\ U & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{a} & Z & \xrightarrow{b} & T(U) \end{array}$$

En appliquant  $P_\Sigma$  à ce diagramme tout en utilisant le fait que par construction  $P_\Sigma \circ T = T_\Sigma \circ P_\Sigma$ , on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{P_\Sigma(a)} & Z & \xrightarrow{[T_\Sigma \circ P_\Sigma](g) \circ P_\Sigma(b)} & T_\Sigma(X) \\ \uparrow P_\Sigma(g) & & \parallel & & \parallel & & \uparrow T_\Sigma \circ P_\Sigma(g) \\ U & \xrightarrow{P_\Sigma(f)} & Y & \xrightarrow{P_\Sigma(a)} & Z & \xrightarrow{P_\Sigma(b)} & T_\Sigma(U) \end{array}$$

Ainsi, comme  $P_\Sigma(g)$  est un isomorphisme dans  $A_\Sigma$ , le triangle du haut est isomorphe au triangle du bas qui est l'image par  $P_\Sigma$  d'un triangle distingué de  $A$ .

(TR3) Soit le triangle distingué de  $A_\Sigma$

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} T_\Sigma(X)$$

Il faut montrer que le triangle suivant est aussi dans  $\Psi$  :

$$Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} T_\Sigma(X) \xrightarrow{-T_\Sigma(\alpha)} T_\Sigma(Y)$$

Comme le premier triangle est distingué dans  $A_\Sigma$ , il est isomorphe à l'image d'un triangle distingué de  $A$ , disons le triangle suivant :

$$U \xrightarrow{a} V \xrightarrow{b} W \xrightarrow{c} T(U)$$

Mais dans  $A$  le triangle

$$V \xrightarrow{b} W \xrightarrow{c} T(U) \xrightarrow{-T(a)} T(V)$$

est aussi distingué, donc en lui appliquant  $P_\Sigma$  on a l'isomorphisme de triangles suivant qui montre que le triangle du haut est aussi dans  $\Psi$  :

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & T_\Sigma(X) & \xrightarrow{-T(\alpha)} & T_\Sigma(Y) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ V & \xrightarrow{P_\Sigma(b)} & W & \xrightarrow{P_\Sigma(c)} & T_\Sigma(U) & \xrightarrow{-T_\Sigma(P_\Sigma(a))} & T_\Sigma(V) \end{array}$$

où les carrés commutent par construction ou en appliquant  $-T_\Sigma$  au carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ U & \xrightarrow{P_\Sigma(a)} & V \end{array}$$

(TR4) Soit le diagramme suivant dans  $A_\Sigma$  :

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & Y_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Z_1 & \xrightarrow{\gamma_1} & T_\Sigma(X_1) \\ \phi \downarrow & & \xi \downarrow & & \psi \downarrow & & \downarrow T(\phi) \\ X_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & Y_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Z_2 & \xrightarrow{\gamma_2} & T_\Sigma(X_2) \end{array}$$

où le premier carré commute ; on veut trouver un morphisme  $\psi$  le rendant commutatif. Pour se faire, nous tenterons de nous ramener à la situation équivalente dans  $A$  à l'aide du lemme 2 Supposons que le premier triangle est isomorphe à l'image par  $P_\Sigma$  de

$$X'_1 \xrightarrow{a_1} Y'_1 \xrightarrow{b_1} Z'_1 \xrightarrow{c_1} T(X'_1)$$



et que le second est isomorphe à l'image de

$$X'_2 \xrightarrow{a_2} Y'_2 \xrightarrow{b_2} Z'_2 \xrightarrow{c_2} T(X'_2)$$

Nous avons donc le diagramme commutatif suivant, où pour  $i = 1, 2$ ,  $\lambda_i, \mu_i, \nu_i$  sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X'_1 & \xrightarrow{P_\Sigma(a_1)} & Y'_1 & \xrightarrow{P_\Sigma(b_1)} & Z'_1 & \xrightarrow{P_\Sigma(c_1)} & T(X'_1) \\
 \lambda_1 \downarrow & & \mu_1 \downarrow & & \nu_1 \downarrow & & \downarrow T(\lambda_1) \\
 X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & Y_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Z_1 & \xrightarrow{\gamma_1} & T_\Sigma(X_1) \\
 \phi \downarrow & & \psi \downarrow & & & & \downarrow \phi \\
 X_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & Y_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Z_2 & \xrightarrow{\gamma_2} & T_\Sigma(X_2) \\
 \lambda_2 \uparrow & & \mu_2 \uparrow & & \nu_2 \uparrow & & \uparrow T(\lambda_2) \\
 X'_2 & \xrightarrow{P_\Sigma(a_2)} & Y'_2 & \xrightarrow{P_\Sigma(b_2)} & Z'_2 & \xrightarrow{P_\Sigma(c_2)} & T(X'_2)
 \end{array}$$

En composant les morphismes du dernier diagramme, on obtient donc :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X'_1 & \xrightarrow{P_\Sigma(a_1)} & Y'_1 & \xrightarrow{P_\Sigma(b_1)} & Z'_1 & \xrightarrow{P_\Sigma(c_1)} & T(X'_1) \\
 \lambda_2^{-1} \phi \lambda_1 \downarrow & & \downarrow \mu_2^{-1} \psi \mu_1 & & & & \downarrow T(\lambda_2^{-1} \phi \lambda_1) \\
 X'_2 & \xrightarrow{P_\Sigma(a_2)} & Y'_2 & \xrightarrow{P_\Sigma(b_2)} & Z'_2 & \xrightarrow{P_\Sigma(c_2)} & T(X'_2)
 \end{array}$$

où le premier carré commute. Par le corollaire 2, on peut trouver des représentants aux morphismes verticaux du dernier diagramme et un morphisme  $u$  tel que dans  $A$

$$\begin{array}{ccccccc}
 X'_1 & \xrightarrow{a_1} & Y'_1 & \xrightarrow{b_1} & Z'_1 & \xrightarrow{c_1} & T(X'_1) \\
 \uparrow \parallel & & \uparrow \parallel & & & & \uparrow \parallel \\
 U & \xrightarrow{u} & V & & & & T(U) \\
 \downarrow \parallel & & \downarrow \parallel & & & & \downarrow \parallel \\
 X'_2 & \xrightarrow{a_2} & Y'_2 & \xrightarrow{b_2} & Z'_2 & \xrightarrow{c_2} & T(X'_2)
 \end{array}$$

Par TR2, on peut compléter la deuxième ligne en un triangle distingué de  $A$ . On peut ensuite utiliser TR3 pour obtenir des morphismes de triangles entre le triangle central

et les triangles du haut et du bas. On a donc la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X'_1 & \xrightarrow{a_1} & Y'_1 & \xrightarrow{b_1} & Z'_1 & \xrightarrow{c_1} & T(X'_1) \\
 g_1 \uparrow & & g_2 \uparrow & & g_3 \uparrow & & \uparrow T(g_1) \\
 U & \xrightarrow{u} & V & \xrightarrow{v} & W & \xrightarrow{w} & T(U) \\
 f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & \downarrow T(f_1) \\
 X'_2 & \xrightarrow{a_2} & Y'_2 & \xrightarrow{b_2} & Z'_2 & \xrightarrow{c_2} & T(X'_2)
 \end{array}$$

où  $g_3$  est dans  $\Sigma$  par l'hypothèse SM5. Il suffit donc pour terminer la preuve d'appliquer  $P_\Sigma$  pour transposer ce diagramme dans  $A_\Sigma$  :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X'_1 & \xrightarrow{P_\Sigma(a_1)} & Y'_1 & \xrightarrow{P_\Sigma(b_1)} & Z'_1 & \xrightarrow{P_\Sigma(c_1)} & T_\Sigma(X'_1) \\
 \downarrow \lambda_1 & & \downarrow \mu_1 & & \downarrow \nu_1 & & \downarrow T_\Sigma(\lambda_1) \\
 X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & Y_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Z_1 & \xrightarrow{\gamma_1} & T_\Sigma(X_1) \\
 \phi \downarrow & & \downarrow \xi & & \downarrow \psi & & \downarrow T_\Sigma(\phi) \\
 X_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & Y_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Z_2 & \xrightarrow{\gamma_2} & T_\Sigma(X_2) \\
 \lambda_2 \uparrow & & \uparrow \mu_2 & & \uparrow \nu_2 & & \uparrow T_\Sigma(\lambda_2) \\
 X'_2 & \xrightarrow{P_\Sigma(a_2)} & Y'_2 & \xrightarrow{P_\Sigma(b_2)} & Z'_2 & \xrightarrow{P_\Sigma(c_2)} & T_\Sigma(X'_2)
 \end{array}$$

où  $\psi = \nu_2^{-1} P_\Sigma(f_3) P_\Sigma(g_3)^{-1} \nu_1$  est le morphisme que l'on cherchait.

(TR5) La preuve se fait à l'aide d'un argument similaire à celui utilisé pour démontrer TR4.  $\square$

# Chapitre 4

## Catégories dérivées

### 4.1 Définition et existence

Nous pouvons maintenant définir pour une catégorie abélienne  $A$  donnée une catégorie  $D(A)$  ayant des propriétés similaires à celles de la catégorie des complexes sur  $A$  et où les quasi-isomorphismes de  $K(A)$  correspondront à des isomorphismes de  $D(A)$ . Soit  $\Lambda$  la famille des quasi-isomorphismes de  $K(A)$ .

**Définition 5.** *La catégorie dérivée de  $A$  est la catégorie  $D(A) = K(A)_\Lambda$ .*

Lorsque nous parlerons dans la suite de la structure triangulée de  $K(A)$ , nous ferons référence à la structure triangulée obtenue en considérant les triangles distingués au sens de la section 2.2. Pour étudier la structure de  $D(A)$  et pouvoir y définir les triangles distingués, l'analogue des courtes suites exactes, afin de pouvoir leur associer des longues suites exactes de cohomologie, nous devons d'abord montrer le théorème suivant :

**Théorème 10.**  *$\Lambda$  est un système multiplicatif compatible avec la structure triangulée de  $K(A)$ .*

*Démonstration.*

(SM1) Si  $H(f)$  et  $H(g)$  sont des isomorphismes, alors  $H(f \circ g) = H(f) \circ H(g)$  est aussi un isomorphisme. Évidemment, on a aussi que  $H(Id_X)$  est un isomorphisme.

(SM2) Soit  $f : X \rightarrow Y$  et  $s : Z \rightarrow Y$ , avec  $s \in \Lambda$ . Comme la catégorie  $K(A)$  est triangulée, il existe un triangle distingué :

$$Z \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} T(Z)$$

On peut construire un autre triangle distingué à partir du morphisme  $uf$  :

$$W \xrightarrow{t} X \xrightarrow{uf} N \xrightarrow{h} T(W)$$

On a donc la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 W^\cdot & \xrightarrow{t} & X^\cdot & \xrightarrow{uf} & N^\cdot & \xrightarrow{h} & T(W^\cdot) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 g \downarrow & & f \downarrow & & Id_N \downarrow & & T(g) \downarrow \\
 Z^\cdot & \xrightarrow{s} & Y^\cdot & \xrightarrow{u} & N^\cdot & \xrightarrow{v} & T(Z^\cdot)
 \end{array}$$

où  $g$  existe par TR3 puisque le deuxième carré commute. Le premier carré serait donc la complétion voulue si  $t \in \Lambda$ . Pour le montrer, on utilise le fait que  $H$  est cohomologique par le lemme 6 pour associer les longues suites exactes suivantes à chacun des triangles du diagramme précédent :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H^k(W^\cdot) & \xrightarrow{t^*} & H^k(X^\cdot) & \xrightarrow{(uf)^*} & H^k(N^\cdot) & \xrightarrow{h^*} & H^{k+1}(W^\cdot) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow H^k(g) & & \downarrow H^k(f) & & \downarrow H^k(Id) & & \downarrow H^{k+1}(g) & & \\
 \cdots & \longrightarrow & H^k(Z^\cdot) & \xrightarrow{s^*} & H^k(Y^\cdot) & \xrightarrow{u^*} & H^k(N_f) & \xrightarrow{v^*} & H^{k+1}(Z^\cdot) & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Comme  $s \in \Lambda$ , dans la deuxième suite  $s^*$  est un isomorphisme et donc on doit avoir  $N^\cdot = 0$ . Mais en utilisant la première suite en y posant que  $N^\cdot = 0$ , on obtient immédiatement que  $t^*$  est un isomorphisme, donc que  $t \in \Lambda$ .

Pour démontrer l'autre partie de SM2, on se place dans la catégorie opposée à  $K(A)$  qui est aussi triangulée et on y fait un argument similaire.

(SM3) Soit  $f, g : X^\cdot \rightarrow Y^\cdot$ . Si on pose  $w = f - g$ , vérifier SM3 se ramène à montrer l'équivalence suivante :

$$\exists_{s \in \Lambda} sw = 0 \Leftrightarrow \exists_{t \in \Lambda} wt = 0$$

On démontre premièrement ( $\Rightarrow$ ) : soit  $s : Y \rightarrow S$  un élément de  $\Lambda$  tel que  $sw = 0$ . On débute en prenant à l'aide de TR3 le triangle

$$Z^\cdot \xrightarrow{u} Y^\cdot \xrightarrow{s} S^\cdot \xrightarrow{v} T(Z^\cdot)$$

Comme le foncteur  $\text{Hom}(X^\cdot, -)$  est cohomologique, on a la suite exacte dans  $K(A)$

$$\cdots \rightarrow \text{Hom}(X^\cdot, Z^\cdot) \xrightarrow{u_*} \text{Hom}(X^\cdot, Y^\cdot) \xrightarrow{s_*} \text{Hom}(X^\cdot, S^\cdot) \xrightarrow{v_*} \text{Hom}(X^\cdot, T(Z^\cdot)) \rightarrow \cdots$$

L'hypothèse peut maintenant s'écrire  $sw = s_*(w) = 0$ , c'est-à-dire que  $w$  est dans  $\text{Ker}(s_*) = \text{Im}(u_*)$ . Il existe donc  $z \in \text{Hom}(X^\cdot, Z^\cdot)$  tel que  $u_*(z) = uz = w$ . On peut maintenant construire à partir du morphisme  $z$  le triangle

$$\bar{X}^\cdot \xrightarrow{t} X^\cdot \xrightarrow{z} Z^\cdot \xrightarrow{m} T(\bar{X}^\cdot)$$

On applique comme plus haut le foncteur cohomologique  $\text{Hom}(-, Y^\cdot)$  pour obtenir la longue suite exacte :

$$\cdots \rightarrow \text{Hom}(Z^\cdot, Y^\cdot) \xrightarrow{z^*} \text{Hom}(X^\cdot, Y^\cdot) \xrightarrow{t^*} \text{Hom}(\bar{X}^\cdot, Y^\cdot) \rightarrow \cdots$$

On a que  $z^*(u) = uz = w$  par construction, donc  $w \in \text{Im}(z^*) = \text{Ker}(t^*)$ , c'est-à-dire que  $t^*(w) = wt = 0$  comme voulu. Il reste donc à montrer que  $t \in \Lambda$ . Considérons les longues suites exactes de cohomologie associées aux deux triangle que nous venons de construire :

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow H^k(Z) \xrightarrow{H^k(u)} H^k(Y) \xrightarrow{H^k(s)} H^k(S) \xrightarrow{H^k(v)} H^{k+1}(Z) \longrightarrow \dots \\ \dots &\longrightarrow H^k(\bar{X}) \xrightarrow{H^k(t)} H^k(X) \xrightarrow{H^k(z)} H^k(Z) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(\bar{X}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Mais comme  $s \in \Lambda$ , dans la première suite  $H^k(s)$  est un isomorphisme et alors par un raisonnement analogue à celui fait en SM2 on a que  $H^k(Z) = 0$ , et on en déduit à l'aide de la deuxième suite que  $H^k(t)$  est aussi un isomorphisme, c'est-à-dire que  $t$  est un quasi-isomorphisme.

L'implication réciproque se déduit en se plaçant dans la catégorie triangulée  $K(A)^{op}$  et en faisant un raisonnement similaire.

(SM4)  $H^*(s)$  est un isomorphisme pour un certain morphisme de complexes  $s$  si et seulement si  $H^k(T(s)) = H^{k+1}(s) = 0$

(SM5) Cet axiome est déjà vérifié : voir le lemme 3.

□

Nous avons ainsi montré, en utilisant les résultats des chapitres précédents, que  $D(A)$  est une catégorie additive et triangulée puisque  $\Lambda$  est un système multiplicatif compatible avec la structure triangulée de  $K(A)$ . En utilisant un argument similaire, on peut montrer que la famille des quasi-isomorphismes des catégories triangulées  $K^+(A), K^-(A)$  et  $K^b(A)$  sont aussi des systèmes multiplicatifs. On peut donc définir les catégories  $D^+(A), D^-(A)$  et  $D^b(A)$  respectivement comme les localisations de ces catégories par les quasi-isomorphismes. Remarquons que nous pourrions aussi définir  $D^+(A), D^-(A)$  et  $D^b(A)$  comme les sous-catégories pleines de  $D(A)$  ayant respectivement pour objets les complexes bornés inférieurement, bornés supérieurement et bornés.

Il est important de remarquer qu'en général cette catégorie n'est *pas* abélienne puisque la localisation d'une catégorie abélienne n'est pas toujours abélienne. En effet, supposons  $D(A)$  soit abélienne et considérons un monomorphisme  $f : X \rightarrow Y$  dans  $K(A)$ . On a vu dans la section 3 du chapitre 1 que  $P_\Lambda(f)$  doit aussi être un monomorphisme. Comme on suppose que  $D(A)$  est abélienne, nous dire que la courte suite  $D(A)$  suivante :

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{P_\Lambda(f)} Y \rightarrow \text{Coker}(f) \rightarrow 0$$

est exacte dans  $D(A)$ . Mais par le théorème 7, on a aussi le diagramme commutatif

suivant où  $u$  est un isomorphisme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{P_\Lambda(f)} & Y & \longrightarrow & \text{Coker}(f) \longrightarrow 0 \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \downarrow u \\
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{P_\Lambda(f)} & Y & \longrightarrow & C_{P_\Lambda(f)} \longrightarrow T(X)
 \end{array}$$

Soit  $M$  un complexe de  $K(A)$ . Comme  $\text{Hom}_{\mathbf{D}(A)}(M, -)$  est un foncteur cohomologique, on a une longue suite exacte de  $\mathbb{Z}$ -modules

$$\dots \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}(A)}^k(M, X) \xrightarrow{P_\Lambda(f)_*} \text{Hom}_{\mathbf{D}(A)}^k(M, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}(A)}^k(M, C_{P_\Lambda(f)}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}(A)}^{k+1}(M, X) \longrightarrow \dots$$

$P_\Lambda(f)_*$  est injectif puisque  $P_\Lambda(f)$  l'est. On a donc que  $\text{Hom}_{\mathbf{D}(A)}^k(M, C_{P_\Lambda(f)}) = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ; on a ainsi que  $\text{Coker}(P_\Lambda(f)) \simeq C_{P_\Lambda(f)} = 0$ , donc que  $P_\Lambda(f)$  est un isomorphisme. En résumé, on a montré que si  $\mathbf{D}(A)$  est une catégorie abélienne et si  $f$  est un monomorphisme de  $K(A)$ , alors  $P_\Lambda(f)$  est un isomorphisme. Si on prend  $f = 0$  le morphisme allant du complexe nul de  $K(A)$  à un complexe non-acyclique  $Y$ , alors  $f$  est un monomorphisme qui n'est ni un isomorphisme, ni un quasi-isomorphisme et donc  $P_\Lambda(f)$  n'est pas un isomorphisme. Ainsi, on a montré qu'en général  $\mathbf{D}(A)$  n'est pas abélienne.

Enfin, remarquons qu'en utilisant la propriété universelle de  $Q_\Lambda$ , nous pouvons prolonger le foncteur  $H : K(A) \rightarrow A$  à  $\mathbf{D}(A)$ . Par définition,  $H$  envoie les quasi-isomorphismes sur des isomorphismes de  $A$ , il existe donc un foncteur  $\bar{H}$  tel que

$$\begin{array}{ccc}
 K(A) & \xrightarrow{Q_\Lambda} & \mathbf{D}(A) \\
 & \searrow H & \downarrow \bar{H} \\
 & & A
 \end{array}$$

commute. Nous noterons aussi le foncteur  $\bar{H}$  par  $H$ , le contexte écartant tout risque de confusion.

## 4.2 Foncteurs dérivés

Nous indiquerons dans cette section comment utiliser les catégories dérivées pour définir les foncteurs dérivés à droite d'un foncteur exact à gauche. Pour définir les foncteurs dérivés à gauche d'un foncteur exact à droite, on pourra faire la construction duale similaire. Soit  $A, B$  deux catégories abéliennes. Notons par  $\Lambda(A)$  et  $\Lambda(B)$  les familles de quasi-isomorphismes de  $K(A)$  et  $K(B)$  respectivement. Soit  $F : A \rightarrow B$  un foncteur additif exact à gauche. Comme  $F$  préserve les homotopies, on peut définir le foncteur de catégories triangulées  $K(F) : K(A) \rightarrow K(B)$  comme étant le foncteur envoyant le complexe

$$\dots \longrightarrow X^{k-1} \xrightarrow{d_X^{k-1}} X^k \xrightarrow{d_X^k} X^{k+1} \longrightarrow \dots$$

sur le complexe de  $K(B)$

$$\dots \longrightarrow F(X^{k-1}) \xrightarrow{F(d_X^{k-1})} F(X^k) \xrightarrow{F(d_X^k)} F(X^{k+1}) \longrightarrow \dots$$

On définit aussi les foncteurs  $K^+(F)$ ,  $K^-(F)$  et  $K^b(F)$  de manière similaire.  $K(F)$  est un foncteur de catégories triangulées car il envoie les cônes de  $K(A)$  sur des cônes de  $K(B)$  comme on le vérifie aisément, il envoie donc tout triangle de  $K(A)$  isomorphe à un triangle standard sur un triangle de  $K(B)$  isomorphe à l'image par  $K(F)$  de ce triangle standard, et il commute avec les foncteurs de translation  $T_A$  et  $T_B$  de  $K(A)$  et  $K(B)$  respectivement.

**Lemme 8.** *Si  $F$  est exact, c'est-à-dire qu'il envoie les courtes suites exactes sur les courtes suites exactes, alors  $K(F)$  envoie les quasi-isomorphismes de  $K(A)$  sur des quasi-isomorphismes de  $K(B)$*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que  $K(F)$  envoie les complexes acycliques sur des complexes acycliques, ce qui impliquera alors par le corollaire 4 que si  $g$  est un quasi-isomorphisme, alors  $C_g$  est un complexe acyclique et  $C_{K(F)(g)} = K(F)(C_g)$  est aussi un complexe acyclique. Prouvons que  $K(F)$  envoie les quasi-isomorphismes de  $K(A)$  sur des quasi-isomorphismes de  $K(B)$  : soit  $X$  un complexe acyclique de  $K(A)$ . Comme  $\text{Im}(d_X^{k-1}) = \text{Ker}(d_X^k)$ , alors pour chaque  $k \in \mathbb{Z}$  on a une courte suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(d_X^k) \xrightarrow{u^k} X^k \xrightarrow{v^k} \text{Ker}(d_X^{k+1}) \longrightarrow 0$$

avec  $u^{k+1}v^k = d_X^k$

$$\begin{array}{ccccc} X^{k-1} & \xrightarrow{d_X^{k-1}} & X^k & \xrightarrow{d_X^k} & X^{k+1} \\ & \searrow v^{k-1} & \nearrow u^k & \searrow v^k & \nearrow u^{k+1} \\ & & \text{Ker}(d_X^k) & & \text{Ker}(d_X^{k+1}) \end{array}$$

Comme on suppose  $F$  exact, la suite suivante est donc aussi exacte :

$$0 \longrightarrow F(\text{Ker}(d_X^k)) \xrightarrow{F(u^k)} F(X^{k-1}) \xrightarrow{F(v^k)} F(\text{Ker}(d_X^{k+1})) \longrightarrow 0$$

et  $F(u^{k+1})F(v^k) = F(d_X^k)$ . On a donc le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} F(X^{k-1}) & \xrightarrow{F(d_X^{k-1})} & F(X^k) & \xrightarrow{F(d_X^k)} & F(X^{k+1}) \\ & \searrow F(v^{k-1}) & \nearrow F(u^k) & \searrow F(v^k) & \nearrow F(u^{k+1}) \\ & & F(\text{Ker}(d_X^k)) & & F(\text{Ker}(d_X^{k+1})) \end{array}$$

Comme  $F(u^k)$  est un monomorphisme et  $F(v^{k-1})$  un épimorphisme, on doit avoir que  $\text{Im}(F(d_X^{k-1})) = \text{Im}(F(u^k))$  et que  $\text{Ker}(F(d_X^k)) = \text{Ker}(F(v^k)) = \text{Im}(F(u^k))$ . Le complexe  $K(F)(X)$  est donc acyclique.  $\square$

Puisque  $K(F)$  envoie les quasi-isomorphismes sur des quasi-isomorphismes, on peut utiliser la propriété universelle de la localisation pour définir un foncteur  $RF : D(A) \longrightarrow D(B)$  :

$$\begin{array}{ccc} K(A) & \xrightarrow{K(F)} & K(B) \\ P_{\Lambda(A)} \downarrow & & \downarrow P_{\Lambda(B)} \\ D(A) & \xrightarrow{RF} & D(B) \end{array}$$

$RF$  est le foncteur dérivé à droite de  $F$ . On définit aussi  $R^i F : A \longrightarrow B$  comme étant le foncteur  $H^i \circ RF$ .

En général, si  $F$  n'est pas exact, alors  $K(F)$  n'envoie pas nécessairement les quasi-isomorphismes sur des quasi-isomorphismes. Il faut alors restreindre  $K(F)$  à une sous-catégorie pleine de  $K(A)$  de manière à ce qu'il ait cette propriété et que l'on puisse faire sur cette sous-catégorie une construction similaire à celle faite dans le cas où  $F$  est exact.

Le théorème suivant nous indique quelle sous-catégorie pleine de  $K(A)$  on peut utiliser. On rappelle qu'un *sous-objet* d'un objet  $X$  est un objet  $Y$  avec un monomorphisme  $f : Y \longrightarrow X$ . On remarque aussi que si on a une sous-classe  $R \subset \text{Ob}(A)$ , on peut parler de la sous-catégorie pleine  $K(R)$  de  $K(A)$  construite en ne prenant que les complexes d'objets de  $R$  et leur morphismes de complexes. On définit de même  $K^+(R)$ ,  $K^-(R)$  et  $K^b(R)$ . Si  $R$  est fermée sous les sommes directes, alors  $K(R)$  est une catégorie additive et triangulée.

**Définition 6.** Soit  $F : A \longrightarrow B$  un foncteur exact à gauche. On appelle classe d'objets adaptée à  $F$  une sous-classe  $R \subset \text{Ob}(A)$  telle que

- (COA1)  $R$  est fermée sous les sommes directes
- (COA2)  $F$  envoie les complexes acycliques de  $K^+(R)$  sur des complexes acycliques.
- (COA3) Pour tout objet  $Y$  de  $A$  il existe un objet  $X$  de  $R$  avec un monomorphisme  $Y \longrightarrow X$ .

**Théorème 11.** Si  $R$  est une classe d'objets vérifiant COA1 et COA3 (en particulier une classe d'objets adaptée à un foncteur exact à gauche  $F : A \longrightarrow B$ ), alors  $\Lambda(R)$ , la famille des quasi-isomorphismes de  $K^+(R)$ , est un système multiplicatif et l'unique foncteur  $G$  donné par la propriété universelle de la localisation

$$\begin{array}{ccc} K^+(R)_{\Lambda(R)} & \xrightarrow{G} & D^+(A) \\ P_{\Lambda(R)} \uparrow & & \uparrow P_{\Lambda(A)} \\ K^+(R) & \xrightarrow{I} & K^+(A) \end{array}$$

où  $I$  est le foncteur d'inclusion, est une équivalence de catégories triangulées.

Indiquons comment on démontre ce théorème. Le fait que  $\Lambda(R)$  est un système multiplicatif se démontre avec un argument analogue à la démonstration du théorème 10 : les arguments qu'on y utilise sont valable dans notre cas si on remarque que comme



$R$  est fermé sous les sommes directes, alors le cône  $C_f$  d'un morphisme  $f : X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot$ ,  $X^\cdot, Y^\cdot \in R$  est aussi dans  $R$ . On prouve ensuite que  $K^+(R)$  est une sous-catégorie pleine de  $K^+(A)$  en utilisant le théorème 3 - on vérifie la deuxième condition de ce théorème en construisant explicitement le morphisme requis. Il faut finalement montrer que tout objet  $Y^\cdot$  de  $D^+(A)$  est isomorphe à un objet  $X^\cdot$  de  $K^+(R)$ , ce qu'on fait en construisant un quasi-isomorphisme  $X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot$  dans  $K^+(A)$ , ce qui donnera un isomorphisme dans  $D^+(A)$ . C'est cette construction qui exige la restriction aux complexes bornés inférieurement.

Continuons maintenant la construction des foncteurs dérivés à l'aide de ce théorème : supposons que  $A$  admet suffisamment d'objets injectifs, c'est-à-dire que pour tout objet  $X$  de  $A$  il y a un objet  $I$  injectif qui un sous objet de  $X$ . Considérons  $R$  comme étant la famille des objets injectifs de  $A$ . On a que  $R$  vérifie COA1-COA3 : on a COA1 parce que une somme directe finie  $\bigoplus_{j \in J} X_j$  dans  $A$  est injective si et seulement si les  $X_j$  sont tous injectifs. COA3 est par définition le fait que  $A$  admet suffisamment d'objets injectifs. Vérifions COA2 : soit  $I^\cdot$  un complexe acyclique de  $K^+(I)$ . Le morphisme  $0 : I^\cdot \longrightarrow I^\cdot$  est un quasi-isomorphisme car  $\forall_{k \in \mathbb{Z}} H^k(I^\cdot) = 0$  et donc  $H^k(0) : H^k(I^\cdot) \longrightarrow H^k(I^\cdot)$  est un isomorphisme. En utilisant le fait que  $I^\cdot$  est injectif et que nous nous sommes restreint à des complexes bornés inférieurement, on peut montrer que  $0$  est homotope à  $Id_{I^\cdot}$  en montrant que tout quasi-isomorphisme de  $K^+(R)$  est un isomorphisme - voir [Gelfand - Manin]p. 180. On a alors que  $F(0)$  est homotope à  $F(Id_{I^\cdot}) = Id_{F(I^\cdot)}$  et donc que  $0, Id : H^k(F(I^\cdot)) \longrightarrow H^k(F(I^\cdot))$  sont égaux. Il faut donc avoir que  $H^k(F(I^\cdot)) = 0$ , c'est-à-dire que  $F(I^\cdot)$  est acyclique. Comme  $R$  vérifie COA1-COA3, on peut définir  $RF$  sur  $K^+(R)_{\Lambda(R)}$  de manière semblable au cas où  $F$  est exact et le prolonger à  $D^+(A)$  en utilisant un quasi-inverse  $\Phi$  à l'équivalence donnée dans le dernier théorème, c'est-à-dire un foncteur de catégories triangulées tel que  $\Phi \circ G$  est isomorphe au foncteur identité sur  $D^+(A)$  et  $G \circ \phi$  est isomorphe au foncteur identité sur  $K^+(R)_{\Lambda(R)}$ , pour définir  $RF : D^+(A) \longrightarrow D^+(B)$  comme la composition des foncteurs

$$D^+(A) \xrightarrow{\Phi} K^+(R) \xrightarrow{K^+(F)} K^+(B) \xrightarrow{P_{\Lambda(B)}} D^+(B)$$

où  $K^+(R) = K^+_{\Lambda(R)}$  car les quasi-isomorphismes de  $K^+(R)$  sont des isomorphismes. Ces trois foncteurs sont des foncteurs de catégories triangulées, donc  $RF$  envoie les triangles distingués sur des triangles distingués.  $H^k$  est un foncteur cohomologique : si on prend un triangle distingué de  $D^+(A)$

$$X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot \longrightarrow Z^\cdot \longrightarrow T(X^\cdot)$$

et comme on pose que  $R^k F = H^k \circ RF$ , on aura donc une longue suite exacte

$$\dots \longrightarrow R^k F(X^\cdot) \longrightarrow R^k F(Y^\cdot) \longrightarrow R^k F(Z^\cdot) \longrightarrow R^{k+1}(X^\cdot) \longrightarrow \dots$$

ce qui montre l'existence de longues suites exactes de cohomologie associées à  $RF$ .

On définit en général les foncteurs dérivés par la propriété universelle suivante :

**Définition 7.** Soit  $F : A \longrightarrow B$  un foncteur exact à gauche. Un foncteur dérivé de  $F$  est une paire  $(RF, \mathcal{E}_F)$ , où  $RF : D^+(A) \longrightarrow D^+(B)$  est un foncteur exact et  $\mathcal{E}_F : P_{\Lambda(A)} \circ$

$K^+(F) \longrightarrow RF \circ P_{\Lambda(B)}$  est un morphisme de foncteur

$$\begin{array}{ccc} D^+(A) & \xrightarrow{RF} & D^+(B) \\ P_{\Lambda(A)} \uparrow & & \uparrow P_{\Lambda(B)} \\ K^+(A) & \xrightarrow{K^+(F)} & K^+(B) \end{array}$$

telle que si on a un autre foncteur  $G : D^+(A) \longrightarrow D^+(B)$  et un autre morphisme de foncteur  $\varepsilon : P_{\Lambda(A)} \circ K^+(F) \longrightarrow RF \circ P_{\Lambda(B)}$ , alors il existe un unique morphisme de foncteur  $\eta : RF \longrightarrow G$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} P_{\Lambda(B)} \circ K^+(F) & \xrightarrow{\varepsilon_F} & RF \circ P_{\Lambda(A)} \\ & \searrow \varepsilon & \downarrow \eta \circ P_{\Lambda(A)} \\ & & G \circ P_{\Lambda(A)} \end{array}$$

Comme dans toute propriété universelle, si pour un foncteur exact à gauche  $F$  il existe un foncteur dérivé  $RF$  comme dans la définition précédente, alors il est unique à isomorphisme de foncteurs près. Mais l'existence de  $RF$  n'est pas assurée en général. Le théorème suivant nous dit dans quels cas on a l'existence de foncteurs dérivés à droite :

**Théorème 12.** *Si un foncteur exact à gauche  $F$  possède une classe d'objets adaptés  $R$ , alors il existe un foncteur dérivé  $(RF, \varepsilon)$ .*

Pour démontrer ce résultat, on définit  $RF$  comme dans la construction faite dans le cas où  $R$  est la famille des objets injectifs de  $A$  et on vérifie que  $RF$  a la propriété universelle définissant la notion de foncteur dérivé.

Résumons cette construction tout en expliquant pourquoi il faut définir les foncteurs dérivés par une propriété universelle. Soit  $F : A \longrightarrow B$  un foncteur de catégories abéliennes exact à gauche, et supposons qu'il existe une classe d'objets adaptés à  $F$ . Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} K^+(R)_{\Lambda(R)} & \xrightleftharpoons[\Phi]{G} & D^+(A) & \xrightarrow{RF} & D^+(B) \\ P_{\Lambda(R)} \uparrow & & \uparrow P_{\Lambda(A)} & & \uparrow P_{\Lambda(B)} \\ K^+(R) & \xrightarrow{I} & K^+(A) & \xrightarrow{F} & K(B) \end{array}$$

Pour définir un foncteur  $RF$ , on prend un quasi-inverse  $\Phi$  à l'équivalence de catégories triangulées  $G$  ; dans le cas particulier où  $R$  est la famille des objets injectifs de  $A$ , on peut obtenir un tel  $\Phi$  en donnant pour chaque  $X^\cdot$  de  $D^+(A)$  une résolution injective  $X^\cdot \implies I^\cdot$ , c'est-à-dire un quasi-isomorphisme entre ces complexes, et définir  $\Phi$  comme le foncteur envoyant  $X^\cdot$  sur  $I^\cdot$  et un morphisme  $X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot$  sur le morphisme canonique entre leurs résolutions respectives  $X^\cdot \implies I^\cdot$  et  $Y^\cdot \implies J^\cdot$  et obtenu en composant avec les isomorphismes associés à ces quasi-isomorphismes dans  $K^+(R)_{\Lambda(R)}$ .

Il peut y avoir plusieurs quasi-inverses possible. Dans le cas général, comme  $R$  vérifie COA2, on peut faire un argument similaire à celui fait pour démontrer le lemme 8 pour démontrer que  $K^+(F) : K^+(R) \longrightarrow K(B)$  envoie les quasi-isomorphismes de  $\Lambda(R)$  sur des quasi-isomorphismes de  $K(B)$ ; il en résulte que  $P_{\Lambda(B)} \circ K^+(F)$  envoie les quasi-isomorphismes sur des isomorphismes. Par la propriété universelle de la localisation appliquée à  $P_{\Lambda(R)}$ , il existe un foncteur  $\overline{K^+(R)} : K^+(R) \longrightarrow D(B)$  tel que  $\overline{K^+(F)} \circ P_{\Lambda(R)} = P_{\Lambda(B)} \circ K^+(F)$ . On peut alors poser que  $RF \stackrel{\text{def}}{=} \overline{K^+(F)} \circ \Phi$ . Comme  $\Phi$  n'est pas uniquement déterminé,  $RF$  de l'est pas non plus. On peut aller voir dans [Gelfand - Manin] pour plus de détails.

On définit dans le cas général  $R^k F$  comme précédemment par  $H^k \circ RF$  et on peut encore associer à un triangle de  $D^+(A)$  une longue suite exacte d'homologie.

Notons enfin qu'il existe d'autres sous-catégories de  $K(A)$  avec lesquelles on peut aussi montrer l'existence de foncteurs dérivés. On peut par exemple remplacer COA2 par les deux conditions suivantes et avoir tout de même l'existence de  $RF$  : (1) si  $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$  est une courte suite exacte de  $A$ , alors  $Y \in R \Leftrightarrow Z \in R$  et (2) si  $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$  est une courte suite exacte de  $A$  telle que  $X, Y, Z \in R$ , alors

$$0 \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow F(Z) \longrightarrow 0$$

est une courte suite exacte de  $B$ . On peut trouver les détails concernant cette construction dans [Grivel].

## Annexe A

# Notations utilisées dans ce mémoire.

$Fl(C)$  La classe des morphismes de la catégorie  $C$ . On notera les morphismes par des lettres romanes minuscules ( $a, b, \dots, z$ ) ou par des lettre grecques minuscules ( $\alpha, \beta, \dots, \omega$ ).

$Ob(C)$  La classe des objets de la catégorie  $C$ . On dénotera les objets d'une catégorie par des lettres romanes majuscules de la fin de l'alphabet :  $X, Y, Z, U, V, T, S, \dots$ . Les premières lettres majuscules de l'alphabet seront plutôt employée pour dénoter les catégorie.

$Ens$  La catégorie des ensembles.

$A^B$  La catégorie des foncteurs allant de  $A$  à  $B$ .

$C^{op}$  La catégorie opposée à la catégorie  $C$ .

$C(A)$  La catégorie des complexes d'objets de  $A$ . On rappelle que  $C(A)$  est additive si  $A$  l'est et abélienne si  $A$  est abélienne. On dénotera le complexe

$$\dots \longrightarrow X^{k-1} \xrightarrow{d_X^{k-1}} X^k \xrightarrow{d_X^{k+1}} X^{k+1} \longrightarrow \dots$$

où  $d_X^k \circ d_X^{k-1} = 0$ , par  $X^\cdot$ . On dénotera respectivement par  $C^+(A)$ ,  $C^-(A)$  et  $C^b(A)$  les catégories des complexes bornés inférieurement, des complexes bornés supérieurement et des complexes bornés.

Une *homotopie* entre deux morphismes  $f, g : X^\cdot \longrightarrow Y^\cdot$  de  $C(A)$  est une famille de morphismes  $h^k : X^k \longrightarrow Y^{k-1}$  tels que  $d_Y^{k-1} h^k + h^{k+1} d_X^k = f - g$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & X^{k-1} & \xrightarrow{d_X^{k-1}} & X^k & \xrightarrow{d_X^k} & X^{k+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \parallel & \swarrow h^k & \parallel & \swarrow h^{k+1} & \parallel & & \\ f^{k-1} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & Y^{k-1} & \xrightarrow{d_Y^{k-1}} & Y^k & \xrightarrow{d_Y^k} & Y^{k+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & g^{k-1} & & g^{k-1} & & g^{k-1} & & \end{array}$$

La relation "il existe une homotopie entre  $f$  et  $g$ " est une relation d'équivalence sur les morphismes de  $C(A)$  compatible avec la composition et l'addition de morphismes.

$K(A)$  La catégorie des complexes d'objets de  $A$  avec comme morphismes les classes de morphismes de complexes de  $C(A)$  modulo homotopie. On dénotera respectivement par  $K^+(A)$ ,  $K^-(A)$  et  $K^b(A)$  les catégories des complexes de  $C^+(A)$ ,  $C^-(A)$  et  $C^b(A)$  modulo homotopie. On appelle *quasi-isomorphisme* tout morphisme  $f$  de complexes de  $K(A)$  tel que  $\forall_{k \in \mathbb{Z}} H^k(f)$  est un isomorphisme.

- = dénotera le morphisme identité  $Id$  sur un objet.
- $\Rightarrow$  dénotera un morphisme élément d'un système multiplicatif.
- $\Leftrightarrow$  dénotera un isomorphisme.

# Bibliographie

- [Barr - Wells] M. BARR ET C. WELLS, *Category theory for computer science*, 3e édition, Les publications CRM, Montréal, 1999.
- [Grivel] P.-P. GRIVEL, *Catégories dérivées et foncteurs dérivés*, dans Algebraic D-modules par Borel et Al., Academic Press, Orlando, 1987.
- [Freyd] P. FREYD, *Abelian Categories*, Harper & Row, New York, 1964.
- [Gelfand - Manin] S.I. GELFAND ET YU. I. MANIN, *Methods of homological algebra*, Springer-Verlag, New-York, 1996.
- [Happel] D. HAPPEL, *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*, London Mathematical Society lecture notes series, Cambridge University press, Cambridge, 1988.
- [Hartshorne] ROBIN HARTSHORNE, *Residues and Duality*, Lecture Notes in Mathematics, Spriger, New-York, 1966.
- [Hilton - Stambach] P.J. HILTON ET U. STAMMBACH, *A course in homological Algebra*. Springer-Verlag, 1997.
- [Iversen] B. IVERSEN, *Cohomology of Sheaves*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [Jacobson] N. JACOBSON, *Basic Algebra II*, Freeman, New-York, 1989.
- [Kashiwara - Schapira] M. KASHIWARA ET P. SCHAPIRA, *Sheaves on Manifolds*, Springer-Verlag, New-York, 1990.
- [Knighten] R. L. KNIGHTEN, *Derived functors*, Thèse de doctorat MIT, 1966.
- [Konig-Zimmermann] S. KONIG ET A. ZIMMERMANN, *Derived Equivalences for Group Rings*, Lecture Notes in mathematics 1686, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [Kostrikin - Shafarevich] A.I. KOSTRIKIN, I.R. SHAFAREVICH, *Algebra V*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New-York, 1991.
- [Algebra VIII] A.I. KOSTRIKIN ET I. R. SHAFAREVICH, ED., *Algebra VIII*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer, New-York, 1992.
- [Maunder] C. R. F. MAUNDER, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [Mitchell] B. MITCHELL, *Theory of categories*, Academic Press, New-York, 1965.
- [Verdier1] J. - L. VERDIER, *Catégories dérivées, état 0.*, Lecture notes in mathematics, Spriger, New-York, v569, 1994, pp. 262-311.

- [Verdier2] J. - L. VERDIER, *Catégories dérivées.*, Astérisque, no. 36, 1996.
- [Weibel] C. A. WEIBEL, *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.